

## **HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **Automatique-Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Alain Y. KIBANGOU**

## **Contributions à l'analyse des systèmes en réseau.**

Thèse soutenue publiquement le **20 juin 2016**,  
devant le jury composé de :

**M. Claudio ALTAFINI**

Professeur, Linköping University, Linköping, Suède, Rapporteur

**M. Pierre COMON**

Directeur de Recherche CNRS, Gipsa-Lab, Grenoble, France), Rapporteur

**M. Alessandro GIUA**

Professeur, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France, Rapporteur

**M. Carlos CANUDAS de WIT**

Directeur de Recherche CNRS, Gipsa-Lab, Grenoble, France, Examineur

**M. Gérard FAVIER**

Directeur de Recherche émérite CNRS, I3S, Sophia Antipolis, France,  
Examineur





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Curriculum vitae . . . . .	3
1.2	Encadrement doctoral et post-doctoral . . . . .	4
1.3	Projets et relations industrielles . . . . .	5
1.4	Collaborations, animation et management de la recherche . . . . .	7
1.5	Publications sur la période 2005-2016 . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Outils mathématiques</b>	<b>15</b>
2.1	Quelques généralités sur la théorie des graphes . . . . .	15
2.1.1	Matrices d'adjacence et Laplacienne . . . . .	16
2.1.2	Graphes distance-réguliers et notion de schéma d'association . . . . .	16
2.1.3	Nullité des graphes bipartis . . . . .	17
2.2	Quelques généralités sur les tenseurs . . . . .	17
2.2.1	Représentations matricielles . . . . .	18
2.2.2	Décomposition canonique . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Consensus et analyse des systèmes en réseau</b>	<b>21</b>
3.1	Consensus de moyenne en temps fini . . . . .	22
3.1.1	Factorisation minimale de la matrice de moyennage . . . . .	24
3.1.2	Calcul distribué de la factorisation de la matrice de moyennage . . . . .	24
3.2	Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes . . . . .	26
3.2.1	Estimation distribuée des valeurs propres de la matrice Laplacienne d'un graphe connexe . . . . .	26
3.2.2	Estimation distribuée de la matrice d'adjacence du graphe . . . . .	34
3.3	Observabilité . . . . .	38
3.3.1	Condition nécessaire d'observabilité . . . . .	40
3.3.2	Caractérisation graphique de l'observabilité pour les graphes distance-réguliers . . . . .	41
3.4	Conclusion . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Structures nonlinéaires et multilinéaires pour les systèmes en réseau</b>	<b>47</b>
4.1	Identification structurelle des systèmes nonlinéaires en blocs . . . . .	48
4.2	Identification conjointe de la topologie et des données d'un système en réseau . . . . .	54
4.2.1	modélisation tensorielle . . . . .	55
4.2.2	Collaboration en réception . . . . .	56
4.3	Traitement distribué des tenseurs de grandes dimensions . . . . .	60
4.3.1	Formulation du problème et solution proposée . . . . .	62
4.4	Conclusion . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Mobilité intelligente</b>	<b>69</b>
5.1	Navigation . . . . .	70
5.1.1	Estimation de la position d'un véhicule en milieu urbain . . .	70
5.1.2	Estimation de l'attitude en vue de la navigation pédestre . .	77
5.2	Estimation et prédiction de l'état du trafic automobile . . . . .	80
5.2.1	Estimation de l'état du trafic . . . . .	81
5.2.2	Prédiction de l'état du trafic . . . . .	83
5.3	Conclusion . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Prospective</b>	<b>87</b>
6.1	Systèmes cyberphysiques sécurisés . . . . .	88
6.1.1	La confidentialité . . . . .	88
6.1.2	L'intégrité . . . . .	92
6.2	Données massives multidimensionnelles : application à l'analyse et la prédiction du trafic . . . . .	93
6.2.1	Estimation des matrices origine-destination . . . . .	95
6.2.2	Clusterisation dynamique des flux . . . . .	95
6.2.3	Prédiction des temps de parcours dans un contexte multi- origines multi-destinations . . . . .	96
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>

# Introduction

---

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Curriculum vitae . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Encadrement doctoral et post-doctoral . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1.3</b>	<b>Projets et relations industrielles . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.4</b>	<b>Collaborations, animation et management de la recherche .</b>	<b>7</b>
<b>1.5</b>	<b>Publications sur la période 2005-2016 . . . . .</b>	<b>9</b>

---

Marie du Deffand a dit : *"Les sots parlent beaucoup du passé, les sages du présent, et les fous de l'avenir"*. La rédaction de ce mémoire en vue de l'habilitation à diriger les recherches (HDR) est l'exercice imposé pour parler du passer, du présent et de l'avenir de mes recherches, en somme, le moment d'être sot, sage, et fou concomitamment.

Cependant, la rédaction de ce mémoire de HDR n'est-elle qu'un exercice imposé sans réel intérêt ? Cette pensée a été la mienne pendant un certain temps. Pourtant, comme le dit un proverbe chinois, *"Toutes les fleurs de l'avenir sont les semences du présent"* et, je rajouterai, *même du passé*. Cette rédaction est donc l'occasion de faire le point sur le passé et le présent puis de dégager des perspectives cohérentes pour l'avenir. En somme, un bel exercice à renouveler, d'une manière ou d'une autre, tout au long de la carrière.

Une question est souvent apparue tout au long de ma carrière de chercheur. Qui suis-je ? Un automaticien ou un traiteur de signaux ? Ce mémoire ne répondra pas à cette question. Le communautarisme décrié dans notre société est hélas souvent de rigueur dans nos milieux scientifiques. Ma connaissance de la théorie des systèmes et des signaux me permet de contribuer dans le domaine de l'analyse des systèmes commandés en réseaux ou de façon plus générale aux systèmes cyberphysiques, domaine dans lequel une vision large de l'automatique, du traitement du signal et des communications numériques est un réel atout.

Mon intérêt pour les systèmes interconnectés est apparu très tôt dans ma vie de chercheur. Mon projet de fin d'études de mon Diplôme d'études Supérieures Approfondies (DESA) portait déjà sur des « systèmes » en réseau ; les réseaux de neurones artificiels. Il s'agit d'une interconnexion de plusieurs systèmes généralement statiques permettant de réaliser des tâches d'association ou d'identification des plus complexes. Dans cette étude, des questions fondamentales du type quelle architecture de réseau, quelle loi d'interconnexion, quelle approche d'apprentissage ont été des plus cruciales. Ces questions gouvernent encore ma recherche actuelle en

considérant le cas des systèmes en réseau, celui des réseaux de systèmes dynamiques. La notion de réseau, ici, consiste en une interconnexion de systèmes via une infrastructure de communication. Dans ce mémoire, j'utiliserai de façon équivalente les vocables systèmes en réseau et systèmes cyberphysiques puisqu'il s'agit de systèmes intégrant des processus physiques, des ressources de calcul, et une infrastructure de communication<sup>1</sup>. Mes contributions théoriques pour l'analyse de ces systèmes et le traitement de données y afférent trouvent des applications dans le domaine de la mobilité intelligente.

Ce voyage dans le passé et le présent, s'organise comme suit : dans ce chapitre introductif, je décrirai de manière succincte mon parcours avant de présenter mes travaux dans le domaine de l'analyse des systèmes en réseaux (Chapitre 3 : *Consensus et analyse des systèmes en réseau*), le traitement des données en réseau (Chapitre 4 : *Structures nonlinéaires et multilinéaires pour les systèmes en réseau*) et l'application à la mobilité intelligente (Chapitre 5 : *Mobilité intelligente*). Pour aider à la compréhension de ces trois chapitres, quelques notions de base sur les graphes et les tenseurs sont brièvement rappelées au chapitre 2. Une fois le voyage dans le passé et le présent achevé, nous nous projeterons vers le futur et considérerons quelques perspectives (Chapitre 6).

---

1. De mon point de vue, la différence fondamentale entre système en réseau et système cyberphysique n'est pas saillante. Cependant, ces derniers temps, cyberphysique est plus racoleur, pardon... accrocheur

## 1.1 Curriculum vitae

### Etat-civil

- Nom et prénom : KIBANGOU Alain
- Date et lieu de naissance : 1er mai 1975 à Uppsala (Suède)
- Situation familiale : Marié, deux enfants.
- E-mail : alain.kibangou@ujf-grenoble.fr ; gipsa-lab.grenoble-inp.fr

### Titres universitaires

- 2005 : Doctorat en Automatique, traitement du signal et des images, université Nice Sophia Antipolis (France) et Université Cadi Ayyad de Marrakech (Maroc)
  - Titre : Modèles de Volterra à complexité réduite. Estimation paramétrique et application à l'égalisation des canaux de communications.
  - Jury :
    - Francis Castanié (Enseeiht, Toulouse), Président
    - José Ragot (Institut Polytechnique de Nancy Lorraine, Nancy), Rapporteur
    - Driss Aboutajdine (Ecole Mohamedia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc), Rapporteur
    - Gérard Favier (Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS), Directeur de thèse
    - Moha Mrabet Hassani (Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc), Co-Directeur de thèse
- 2000 : Diplôme d'Etudes Supérieures Approfondies (Bac+6) d'Informatique Industrielle et Commande de Processus Physiques, Université Cadi Ayyad de Marrakech (Maroc)
- 1998 : Maîtrise de Physique- option Electronique, Université Cadi Ayyad de Marrakech (Maroc)
- 1996 : DEUG de Mathématiques-Physique, Université Cadi Ayyad de Marrakech (Maroc)

### Fonctions

Depuis Septembre 2009 : Maître de conférences, Section 61.

- Titulaire de la chaire CNRS-UJF "Commande des systèmes par des réseaux sans fil sécurisés" de 2009 à 2014.
- Etablissement : IUT 1, Université Joseph Fourier, Grenoble (France)
- Laboratoire : GIPSA-LAB

## Enseignement et charges administratives

- Depuis 2014 : Responsable des poursuites d'études du département Génie électrique et informatique industrielle (GEII) de l'IUT1 (Grenoble)
- Depuis 2010 : Responsable de la plateforme d'enseignements pratiques en automatique du département GEII1
- Service d'enseignement :
  - 256h ETD en 2014-2015 (1ère et 2ème années de DUT et Licence Professionnelle Distribution Electrique et Automatisme)
    - Automatique (Cours magistral, TD, TP)
    - Mathématiques (TD)
    - Outils logiciels (TP)
  - 64h ETD de 2009 à 2014 (deuxième année DUT)
    - Automatique (cours magistral, TD, TP)
    - Mathématiques (TD)
  - Tutorat : En moyenne, 5 stagiaires DUT et Licence professionnelle depuis 2009.
- 2007-2008 : Institut Supérieur des Systèmes Industriels de Gabès (Tunisie), Enseignant visiteur (Cours et T.D. de Systèmes de télécommunications)
- 2003-2004 : Faculté des Sciences de Nice, Enseignant vacataire en Informatique.
- 2002-2003 : IUT Nice-Sophia Antipolis, Enseignant vacataire en Electronique.

## Recherche

- 2008- 2009 : Chercheur Post-doctorant au GIPSA-Lab, CNRS, INP Grenoble.
- 2006-2008 : Chercheur post-doctorant au LAAS, CNRS, Toulouse
- 2005-2006 : Chercheur post-doctorant à I3S, CNRS, UNSA, Sophia Antipolis.
- 2002-2005 : Doctorant à I3S (Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes), Université de Nice Sophia- Antipolis
- 2000-2002 : Stagiaire puis doctorant au LEI (Laboratoire d'Electronique et Instrumentation), Marrakech (Maroc)

## 1.2 Encadrement doctoral et post-doctoral

### Thèses soutenues.

- *Luis Leon Ojeda* : thèse sur la modélisation macroscopique, l'estimation de la demande et la prédiction du flux pour les systèmes de transport intelligents (Soutenue en juillet 2014, financement projet Hycon2, encadrement à 60%). Devenir : Ingénieur de recherche à IFPEN (Institut Français du Pétrole-Energies Nouvelles)



- *Thi Minh Dung Tran* : thèse sur le consensus en temps fini et l'évaluation distribuée de la robustesse des réseaux via l'estimation des valeurs propres de la matrice Laplacienne (Soutenue en mars 2015, financement gouvernement vietnamien, encadrement à 100%). Devenir : Enseignant-Chercheur à l'Université de Danang (Vietnam).
- *Aida Makni* : thèse sur la fusion de capteurs pour l'estimation d'attitude (Soutenue en mars 2016, financement contrat doctoral, encadrement à 50%).

### Thèses en cours

- *Andres Ladino Lopez* : thèse sur l'estimation et la prédiction de l'état du trafic dans les réseaux urbains et péri-urbains (Soutenance prévue en 2017, financement projet européen, encadrement à 40%)
- *Sebin Gracy* : thèse sur l'observabilité et la cybersécurité (Soutenance prévue en 2018, financement contrat doctoral, encadrement à 60%)

### Post-doctorats

- *Alireza Esna-Ashari* : post-doc sur l'estimation et la détection de fautes avec des réseaux de capteurs sans fil (2011-2012, financement chaire INRIA-Schneider associée à Digiteo, encadrement à 50%).
- *Enrico Lovisari* : post-doc sur le placement optimal des capteurs et la fusion de données de capteurs statiques et mobiles pour le trafic automobile (2014-2015, financement projet SPEEDD, encadrement à 30%)

### Formation suivie

- Accompagner et encadrer son doctorant par ASCEO pour Inria (Septembre 2012).

## 1.3 Projets et relations industrielles

### Coordination de projets

- TeMP (Tensor based information Modeling and Processing) : Financement INRIA-FUNCAP, durée : 2011-2013, partenaire extérieur : Universidade federal do Ceara (Brésil)
- META-TRAM (MEthodes Tensorielles pour l'Analyse du Trafic des réseaux de tRAnsport Multimodaux.) : Financement PEPS INS2I, durée (2013-2015), partenaires extérieurs : I3S (Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS), CRAN (Université de Nancy-Lorraine, CNRS).

## Montage de projets

- ProCyPhys (Protection de la vie privée dans les systèmes cyber-physiques via la théorie des systèmes). Financement d'un post-doc d'un an obtenu dans le cadre de l'appel AGIR-pôle 2016.
- COMFORT (COntrol and FOrecasting in Transportation networks) : Co-rédacteur avec Carlos Canudas de Wit du projet d'équipe associée INRIA-Berkeley. Financement obtenu pour la période 2013-2016.
- SPEEDD (Scalable Proactive Event-Driven Decision-making). Projet européen (STREP) ; démarré en février 2014.
- e-SOS (Emergency Support through Opportunistic networkS : adaptive machines and distributed decision-making) : Porteur du projet dans le cadre de l'appel CHIST-ERA 2013 ; Partenaires extérieurs : Manchester Metropolitan University (Royaume Uni), Università di Salento (Italie), Ege University (Turquie), financement non-obtenu malgré une bonne évaluation.
- SENTINEL (Sensor Networks for Intelligent Energy-Efficient Control and Learning) : porteur du projet dans le cadre de l'appel CHIST-ERA 2011 ; Partenaires extérieurs : EPFL (Suisse), Technical university of Berlin (Allemagne), TelCordia (Pologne), financement non-obtenu malgré une bonne évaluation.
- TicoMed (Traitement du signal Traitement numérique multidimensionnel de l'Information avec applications aux Télécommunications et au génie Biomédical). Projet franco-brésilien dans le cadre CAPES-COFECUB démarré en 2015 ; partenaires extérieurs : I3S (porteur français), CNAM, SUPELEC, UFC (porteur brésilien), UFRJ (Brésil), UFSC (Brésil).
- TiTANS (Road transportation systems), European Training Network soumis en janvier 2016 ; partenaires extérieurs : University of Cyprus (Chypre, porteur), Politecnico di Milano (Italie), Tecnical university of Crete (Greece), DLR (Allemagne), Imperial college London (Royaume Uni), EPFL (Suisse).

## Participation aux projets

- FeedNetBack (2008-2012, FP7, <http://feednetback.eu>)
- Hycon 2 (2010-2014, FP7 NoE, <http://www.hycon2.eu>.)
- CONNECT (2007-2011, ANR, <http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/projet/connect/>)
- MoCOPO (2011-2013, PREDIT, <http://mocopo.ifsttar.fr/>)
- SPEEDD (2014-2017, FP7, <http://speedd-project.eu/>)
- TicoMed (CAPES-COFECUB)
- EGNOS-BUS (2005-2008, Projet Eureka)

### Contrat industriel

- IDEOL-Offshore (mai à juillet 2012)
- Schneider Electric (Post-doc de A. Esna-Ashari financée dans le cadre de la chaire Inria-Schneider, 2012)

## 1.4 Collaborations, animation et management de la recherche

### Collaborations

- Laboratoire I3S, Sophia Antipolis, France : Dans un cadre non contractuel et hérité de mes années de thèse, je collabore avec le laboratoire I3S sur l'analyse des tenseurs et leurs applications en traitement du signal pour les communications sans fil, en analyse des systèmes non-linéaires structurés en blocs et en filtrage adaptatif.
- Laboratoire GTEL, Universidade Federal do Ceara, Fortaleza, Brésil : Cette collaboration a débuté dans un cadre non contractuel puis a débouché de juillet 2011 à juillet 2013 en un projet financé par INRIA pour la partie française et par le FUNCAP pour la partie brésilienne. En dépit de la fin du projet, nous continuons à travailler sur les aspects communications collaboratives. Un autre projet franco-brésilien, projet CAPES-COFECUB, sous-tend notre collaboration actuelle.
- PATH (Partners for Advanced Transportation Technology), University of California at Berkeley, USA : Cette collaboration vient de débuter dans le cadre de l'équipe associée COMFORT (Control and Forecasting in Transportation Networks). En marge des rencontres inria-industries et du workshop BIS (Berkeley-Inria-Stanford), j'ai effectué une première visite en mai 2015 à Berkeley.
- Advanced Sensor Networks group, University of Pretoria, South Africa : Suite à ma participation au congrès mondial de l'IFAC au Cap en 2014, j'ai initié une collaboration avec l'université de Pretoria. Celle-ci s'est matérialisée, à l'heure actuelle par des visites de part et d'autre, et devrait se poursuivre via la mise en place de conventions de cotutelle de thèse.

### Mobilités

- Trois séjours de quinze jours chacun ont été effectués au GTEL (Fortaleza, Brésil) en mai 2012, octobre 2012 et octobre 2013. Ces séjours ont contribué à faire avancer le montage de projets communs et la rédaction d'articles de revues sur les communications collaboratives.
- Séjour d'une semaine au PATH à Berkeley dans le cadre de l'équipe associée COMFORT en mai 2015.

- Séjour d'une semaine au sein du groupe Advanced Sensor Networks de l'université de Prétoria (Afrique du sud) en décembre 2014.

### **Animation et management de la recherche**

- Membre élu du conseil du pôle MSTIC (Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de la COMUE Université Grenoble Alpes (UGA) depuis 2015.
- Co-animateur de l'action PCS (Pervasive Computing Systems) du labex Persyval-Lab depuis 2014.
- Membre de deux comités de sélection pour des postes de Maître de conférences à l'université Joseph Fourier.
- Membre du comité technique de programme de International Workshop on Big Data and Smart Sustainable society (Liverpool, 2015 et Toulouse, 2016).
- Membre du comité technique de programme des conférences EUSIPCO 2009, 2010 et 2011 ;
- Evalueur externe de thèse pour l'université de Pretoria (2015) ;
- Evalueur de projet dans le cadre du programme "Physical Sciences" de l'agence néerlandaise NWO (2015).
- Evalueur de projet dans le cadre du programme Etablissement de nouveaux chercheurs universitaires du Fonds de recherche du Québec-Nature et technologies. (2013)
- Chair ou co-chair de sessions techniques dans les conférences CDC 2013, ECC 2013, ECC 2014 et CIFA 2012.
- Relecteur pour les principaux journaux d'automatique et de traitement du signal (IEEE Trans. Automatic Control, IEEE Trans. Signal Proc., IEEE Trans. Control and Systems Technology, IEEE Trans. Control of Network Systems, Automatica, Systems and Control letters, Elsevier Signal Processing,...).
- Publication co-chair du second workshop IFAC NeCSYS (Distributed estimation and control in networked systems) tenu du 13 au 14 septembre 2010 à Annecy (<http://necsys2010.inrialpes.fr/>).
- Responsable des séminaires du département d'automatique du Gipsa-Lab (de janvier 2010 à janvier 2015).
- Membre du comité d'organisation des premières journées de l'automatique du GDR MACS (5-6 octobre 2015).
- Membre du comité de sélection FADEX (French American Doctoral Exchange Seminar) piloté par le service des sciences et technologies de l'ambassade de France aux Etats-Unis (Thème : Systèmes cyber-physiques, Grenoble-Paris-Rennes 2016).

### Participation à des revues ou ouvrages de vulgarisation

Dans le cadre de l'alliance TIC1-MNT2 des instituts Carnot, j'ai participé, pour le compte de l'institut Carnot LSI (Logiciels et Systèmes Intelligents), à la rédaction du livre blanc "Objets communicants et internet des objets" disponible sur le site de l'institut Carnot (<http://www.instituts-carnot.eu>).

## 1.5 Publications sur la période 2005-2016

### Revue à comité de lecture

1. A. MAKNI, H. FOURATI, and A.Y. KIBANGO, "Energy-aware Adaptive Attitude Estimation Under External Acceleration", IEEE Trans. on Mechatronics (2016)
2. C. CANUDAS DE WIT, F. MORBIDI, L. LEON OJEDA, A.Y. KIBANGO, I. BELLICOT, and P. BELLEMAIN "Grenoble Traffic Lab : An experimental platform for advanced traffic monitoring and forecasting", IEEE Control Systems Magazine, vol. 35, No 3, pp. 23-39, 2015.
3. T.M.D. TRAN and A.Y. KIBANGO, "Distributed estimation of Laplacian eigenvalues via constrained consensus optimization problems", Systems and Control Letters, vol. 80, pp. 56-62, 2015.
4. A.Y. KIBANGO and C. COMMAULT, "Observability in connected strongly regular graphs and distance regular graphs", IEEE Trans. on Control of Network Systems, Vol. 1, No 4, pp. 360-369, 2014.
5. F. MORBIDI and A.Y. KIBANGO, "A distributed solution to the network reconstruction problem", Systems and Control Letters, No. 70, pp. 85-91, 2014.
6. A.Y. KIBANGO, "Step-size sequence design for finite-time average consensus in secure wireless sensor networks", Systems and Control Letters, vol. 67, pp. 19-23, 2014.
7. G. FAVIER, A.Y. KIBANGO and T. BOUILLOC "Nonlinear system modeling and identification using Volterra-PARAFAC models", Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 26, pp. 30-53, January, 2012.
8. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Tensor analysis based model structure determination and parameter estimation for block-oriented nonlinear systems", IEEE Journal on Selected Topics on Signal Processing, Vol. 4, No 3, pp. 514-525, 2010.
9. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Identification of Fifth-order Volterra Systems using I.I.D. Inputs", IET Signal Processing, Vol. 4, Issue 1, pp. 30-44, 2010.
10. G. FAVIER and A.Y. KIBANGO, "Tensor-based methods for system identification. Part 1 : Tensor tools.", Int. Journal of Sciences and Techniques of Automatic control and Computer engineering, Vol. 3, No 1, pp. 840-869, July 2009

11. G. FAVIER and A.Y. KIBANGO, "Tensor-based methods for system identification. Part 2 : Three examples of tensor-based system identification method.", Int. Journal of Sciences and Techniques of Automatic control and Computer engineering, Vol. 3, No 1, pp. 870-889, July 2009.
12. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Identification of Parallel-Cascade Wiener Systems using joint diagonalization of third-order Volterra kernel slices", IEEE Signal Processing letters, Vol. 16, No 3, pp. 188-191, 2009.
13. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Blind Equalization of Nonlinear Channels using Tensor decompositions with code/space/time diversities", Signal Processing 89 (2009), pp. 133-143.
14. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Toeplitz-Vandermonde matrix factorization with application to parameter estimation of Wiener-Hammerstein Systems", IEEE Signal Processing Letters, Vol. 14, No 2, pp. 141-144, 2007.
15. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Wiener-Hammerstein Systems Modeling using Diagonal Volterra Kernels Coefficients", IEEE Signal Processing Letters, Vol. 13, No 6, pp. 381-384, 2006.
16. A.Y. KIBANGO, G. FAVIER and M.M. HASSANI, "Selection of Generalized Orthonormal Bases for Second-order Volterra Filters", Signal Processing 85 (2005), pp. 2371-2385.
17. A.Y. KIBANGO, G. FAVIER and M.M. HASSANI, "Laguerre-Volterra Filters Optimization based on Laguerre spectra", EURASIP Journal on Applied Signal Processing 2005 :17, pp. 2874-2887.

### Revues à comité de lecture (articles en révision)

1. A. MAKNI, A.Y. KIBANGO, and H. FOURATI, "Descriptor Systems Modeling and Filtering for Multisensor Attitude Estimation Under External Acceleration", Automatica.
2. E. LOVISARI, C. CANUDAS DE WIT, and A.Y. KIBANGO, "Flow and Density Reconstruction and Optimal Sensor Placement for Road Transportation Networks", Transportation Research B.
3. T.M.D. TRAN and A.Y. KIBANGO, "Decentralized Monitoring of Robustness in Consensus Networks", IEEE Trans. on Control of Network Systems.

### Actes de colloques à comité de lecture

1. A. LADINO, A.Y. KIBANGO, H. FOURATI, and C. CANUDAS de WIT, "Travel time forecasting from clustered time series via optimal fusion strategy", Proc. 15th European Control Conference (ECC), june 29- july 1st 2016, Aalborg, Denmark.
2. E. LOVISARI, C. CANUDAS de WIT, and A.Y. KIBANGO, "Data fusion algorithms for Density Reconstruction in Road Transportation Networks",

- Proc. 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Dec 2015, Osaka, Japan.
3. E. LOVISARI, C. CANUDAS de WIT, and A.Y. KIBANGO, "Optimal Sensor Placement in Road Transportation Networks using Virtual Variances" Proc. 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Dec 2015, Osaka, Japan.
  4. A. MAKNI, A.Y. KIBANGO, and H. FOURATI, "Descriptor Approach for Attitude Estimation" Proc. IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC), Sep 2015, Sydney, Australia.
  5. E. LOVISARI, C. CANUDAS DE WIT, and A.Y. KIBANGO, "A fusion algorithm for traffic density estimation using sensors and floating car data", Proc. ITS World Congress, Bordeaux, France, Sep. 2015.
  6. T.M.D. Tran and A.Y. KIBANGO "Distributed Estimation of Graph Laplacian Eigenvalues by the Alternating Direction of Multipliers Method". Proc. IFAC World Congress 2014, Cape Town, South Africa, Aug. 2014.
  7. A. MAKNI, H. FOURATI, and A.Y. KIBANGO "Adaptive Kalman Filter for MEMS-IMU based Attitude Estimation under External Acceleration and Parsimonious use of Gyroscopes". Proc. 13th European Control Conference (ECC), Strasbourg, France, June 2014.
  8. A.L.F. de ALMEIDA and A.Y. KIBANGO "Distributed Large-Scale Tensor Decomposition". Proc. 39th Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Process. (ICASSP), Florence, Italy, May 2014.
  9. A.L.F. de ALMEIDA and A.Y. KIBANGO "Distributed computation of tensor decompositions in collaborative networks". Proc. 5th IEEE Int. Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), Saint-Martin, France, Dec. 2013.
  10. A.Y. KIBANGO and C. COMMAULT "Algebraic characterization of observability in distance-regular consensus networks", 52nd IEEE Conf. on Decision and Control (CDC), Florence, Italy, Dec. 2013.
  11. T.M.D. TRAN and A.Y. KIBANGO "Distributed design of finite-time average consensus protocols". 4th IFAC Workshop on Distributed Estimation and control (Necsys), Koblenz, Germany, Sep. 2013.
  12. T.M.D. TRAN and A.Y. KIBANGO "Consensus-based distributed estimation of Laplacian eigenvalues of undirected graphs". 12th European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, July 2013.
  13. L.R. LEON OJEDA, A.Y. KIBANGO, and C. CANUDAS de WIT "Online dynamic travel time prediction using speed and flow measurements". 12th European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, July 2013.
  14. L.R. LEON OJEDA, A.Y. KIBANGO, and C. CANUDAS de WIT "Adaptive Kalman filtering for multi-step ahead traffic flow prediction". American Control Conference (ACC), Washington, USA, June 2013.

15. A.L.F. de ALMEIDA, A.Y. KIBANGO, S. MIRON, and D. ARAUJO "Joint data and connection topology recovery in collaborative wireless sensor networks" 38th Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Process. (ICASSP), Vancouver, May 2013.
16. A. ESNA ASHARI, A.Y. KIBANGO, and F. GARIN, "Distributed input and state estimation for linear discrete-time systems", Proc. 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Honolulu, Hawaii, USA, December 2012.
17. A.Y. KIBANGO and C. COMMAULT, "Decentralized Laplacian Eigenvalues Estimation and Collaborative Network Topology Identification", Proc. 3rd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NeCSYS), Santa-Barbara, USA, Sep. 2012.
18. A. ESNA ASHARI, F. GARIN, and A.Y. KIBANGO, "Joint Input and State Estimation for Linear Discrete-Time Networked Systems", Proc. 3rd IFAC Symposium on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NeCSYS), Santa-Barbara, USA, Sep. 2012.
19. C. CANUDAS DE WIT, L.R. LEON OJEDA, and A.Y. KIBANGO, "Graph constrained-CTM observer design for the Grenoble south ring", Proc. 13th IFAC Symposium on Control in Transportation Systems (CTS), Sofia, Bulgaria, September, 2012.
20. A.Y. KIBANGO, "Consensus de moyenne dans un réseau de capteurs sans fil sécurisé", Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), juillet 2012, Grenoble, France.
21. A.Y. KIBANGO, "Graph Laplacian based Matrix Design for Finite-Time Distributed Average Consensus.", Proc. American Control Conference (ACC 2012), Montreal, CANADA, June, 2012.
22. A.Y. KIBANGO, "Finite-time average consensus based protocol for distributed estimation over AWGN.", Proc. 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (IEEE CDC-ECC 2011), Orlando, FL, USA, December, 2011.
23. A.Y. KIBANGO, "Estimation distribuée basée sur un consensus en temps fini", Colloque GRETSI, septembre 2011, Bordeaux, France.
24. A.Y. KIBANGO and A.L.F. de ALMEIDA, "Distributed Khatri-Rao Space-Time coding and decoding for cooperative networks.", Proc. 19th European Signal Process. Conference (EUSIPCO 2011), Barcelona, Spain, 2011.
25. A.Y. KIBANGO, L. ROS, and C. SICLET, "Doppler Estimation and Data detection for Underwater Acoustic ZF-OFDM Receiver.", Proc. IEEE International Symp. on Wireless Communications and Systems (ISWCS), York, UK, September 20-23, 2010.
26. A.Y. KIBANGO, "Distributed Estimation over Unknown Fading Channels.", Proc. 2nd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control (NecSYS), Annecy, France, September 13-14, 2010.



27. A.Y. KIBANGO, "Blind receivers for MISO Communication systems using a Nonlinear Precoder.", Proc. 18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Aalborg, Denmark, August, 2010.
28. A.Y. KIBANGO and A.L.F. de ALMEIDA, "Distributed PARAFAC based DS-CDMA blind receiver for wireless sensor networks.", Proc. 11th IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), Marrakesh, Morocco, June 2010.
29. A.Y. KIBANGO, C. SICLET, and L. ROS, "Joint Channel and Doppler estimation for multicarrier underwater communications.", Proc. 2010 IEEE International Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Dallas, Texas, USA, March 14-19, 2010.
30. A.Y. KIBANGO, C. SICLET, and L. ROS, "ZF OFDM Receiver for Underwater Communications.", Proc. International Symp. on Communications, Control, and Signal Processing (ISCCSP), Limassol, Cyprus, March 3-5, 2010.
31. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Non-iterative solution for the PARAFAC decomposition with Toeplitz matrix factors", Proc. 17th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Glasgow, Scotland, August 24-28, 2009.
32. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Tensor-based Identification of the Structure of Block-Oriented Nonlinear Systems", 15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID), Saint-Malo, France, July 6-8, 2009.
33. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Identification of Fifth-order Block-Structured Nonlinear Channels using I.I.D. Input signals", Proc. 16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lausanne, Switzerland, August 25-29, 2008.
34. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Matrix and tensor decomposition for identification of block structured nonlinear channels in digital transmission systems", Proc. 9th IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), Recife, Brazil, July 6-9, 2008.
35. A.Y. KIBANGO and A. MONIN, "GPS based Land Vehicle Positioning using Gaussian Sum Filters", ICASSP, March 30-April 4, 2008, Las Vegas, Nevada, USA.
36. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Blind Joint Identification and Equalization of Wiener-Hammerstein communication channels using PARATUCK-2 Tensor Decomposition", EUSIPCO, September 3-7, 2007, pp. 1516-1520, Poznan, Poland.
37. A. CARLOS FERNANDES, A.Y. KIBANGO, G. FAVIER, and J.C.MOTA, " Identification of MIMO radio over fiber uplink channels", 6th IEEE International Telecommunications Symposium (ITS), September 2006, Fortaleza, Brazil.
38. A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Blind linearization of nonlinear channels using a repetition/modulation precoder", 7th IEEE Signal Proc. Advances in Wireless Communications (SPAWC), July 2006, Cannes, France.

- 39. A.Y. KIBANGOU, G. FAVIER, and M.M. HASSANI, " Semi-blind receiver for the fiber-wireless uplink channel", 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'05), Dec. 12-15, 2005, pp. 8168-8173, Seville, Spain.
- 40. A.Y. KIBANGOU, G. FAVIER, and A.L.F. de ALMEIDA, " Blind identification of series-cascade nonlinear channels", Proc. 39th ASILOMAR Conference on Signals, Systems and Computers, October 30- November 2, 2005, pp. 422-426, Pacific Grove, CA, USA
- 41. A.Y. KIBANGOU, G. FAVIER and M.M. HASSANI, "Adaptive Laguerre-Volterra filters Optimization based on Laguerre spectra", Proc. European conference on Signal and Image Processing (EUSIPCO), September 4-8, 2005, Antalya, Turkey.
- 42. A.Y. KIBANGOU and G. FAVIER, "Semi-blind Hammerstein channel parameters and symbol estimation using precoding", Proc. 13th IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP), pp. 681-685, July 17-20, 2005, Bordeaux, France.
- 43. A.Y. KIBANGOU, G. FAVIER and M.M. HASSANI, "Iterative optimization method of GOB-Volterra Filters", Proc. IFAC World Congress, July 4-8, 2005, Prague, Czech Republic.

# Outils mathématiques

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Quelques généralités sur la théorie des graphes . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1.1	Matrices d'adjacence et Laplacienne . . . . .	16
2.1.2	Graphes distance-réguliers et notion de schéma d'association . . . . .	16
2.1.3	Nullité des graphes bipartis . . . . .	17
<b>2.2</b>	<b>Quelques généralités sur les tenseurs . . . . .</b>	<b>17</b>
2.2.1	Représentations matricielles . . . . .	18
2.2.2	Décomposition canonique . . . . .	18

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques outils nécessaires à la compréhension des thèmes développés durant mon activité de recherche. Deux piliers sont à considérer : la théorie des graphes et l'algèbre multilinéaire.

## 2.1 Quelques généralités sur la théorie des graphes

Un graphe  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  consiste en un ensemble de sommets  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ , de cardinal  $|\mathcal{V}| = N$ , et un ensemble d'arêtes  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ; une arête étant une paire non ordonnée de deux sommets de  $\mathcal{V}$ . Deux sommets  $v_n$  et  $v_m$  de  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  sont adjacents si  $(v_n, v_m) \in \mathcal{E}$ . On notera par  $\mathcal{N}_n$  le voisinage de  $v_n$ , c'est-à-dire l'ensemble des sommets adjacents à  $v_n$  et  $\bar{\mathcal{N}}_n$  son complémentaire. Par conséquent :  $\mathcal{N}_n \cup \bar{\mathcal{N}}_n \cup \{v_n\} = \mathcal{V}$ . Le cardinal de  $\mathcal{N}_n$  est aussi appelé *degré* ou *valence* du sommet  $v_n$ . Lorsque tous les sommets ont la même valence, on dit que le graphe est *régulier*.

Une chaîne (ou chemin) entre deux sommets est un ensemble d'arêtes consécutives reliant ces deux sommets. Elle est dite simple si les arêtes sont toutes distinctes. Ainsi, un cycle est une chaîne simple dont les deux extrémités sont identiques. Si deux sommets peuvent toujours être reliés via une chaîne, on dit que le graphe est *connexe*.

La *distance* entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne simple reliant ces deux sommets. On définit alors le *diamètre* d'un graphe comme étant la plus grande distance qui puisse exister entre deux de ses sommets.

Pour un graphe  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ , un couplage est un ensemble d'arêtes n'ayant pas de sommet commun. Ce couplage est maximal s'il contient le nombre maximum d'arêtes possible.

### 2.1.1 Matrices d'adjacence et Laplacienne

Il est d'usage de recourir à une représentation matricielle pour capturer les interactions entre sommets d'un graphe. Deux matrices sont couramment utilisées :

- la matrice d'adjacence  $\mathbf{A}$  qui a ses éléments  $\mathbf{A}_{nm}$  définis par :  $\mathbf{A}_{nm} = 1$  si  $(v_n, v_m) \in \mathcal{E}$  et  $\mathbf{A}_{nm} = 0$ , sinon.
- la matrice Laplacienne  $\mathbf{L}$  qui a ses éléments  $\mathbf{L}_{nm} = -1$  si  $(v_n, v_m) \in \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{L}_{nm} = 0$  si  $(v_n, v_m) \notin \mathcal{E}$ , et  $\mathbf{L}_{nn} = d_n = |\mathcal{N}_n|$ . Elle peut s'écrire en fonction de la matrice d'adjacence de la manière suivante :  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  étant la matrice diagonale des degrés des sommets.

Pour un graphe connexe, 0 est une valeur propre simple de  $\mathbf{L}$ . On a en effet  $\mathbf{L}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{1}$  étant le vecteur d'éléments tous égaux à un.

### 2.1.2 Graphes distance-réguliers et notion de schéma d'association

Un schéma d'association de  $D$  classes est un ensemble de matrices binaires  $(0-1)$ ,  $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_D\}$ , de dimensions,  $N \times N$ , telles que [11] :

1.  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}_N$ ,
2.  $\sum_{i=0}^D \mathbf{A}_i = N\mathbf{J}_N$ ,
3.  $\mathbf{A}_i^T \in \mathcal{A} \forall i$ ,
4.  $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_i \in \text{span}\{\mathcal{A}\}$

où  $\mathbf{I}_N$  et  $\mathbf{J}_N$  désignent, respectivement, la matrice identité et la matrice de moyennage dont les éléments sont tous égaux à  $1/N$ . L'algèbre engendré par les matrices  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 0, \dots, D$ , est dite algèbre de *Bose-Mesner* [8].

**Définition 1** *Considérons un graphe connexe  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  de diamètre  $D$ . Définissons les graphes  $\mathcal{X}_i$ ,  $i = 0, \dots, D$ , de matrices d'adjacence  $\mathbf{A}_i$ , où deux sommets sont adjacents dans  $\mathcal{X}_i$  si et seulement si ils sont à distance  $i$ . Si  $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_D\}$  définit un schéma d'association alors le graphe est distance-régulier.*

En définissant par  $\mathcal{N}_n^{(i)}$  le voisinage de  $v_n$  dans  $\mathcal{X}_i$ , pour toute paire de sommets  $(v_n, v_m)$  à distance  $\text{dist}(v_n, v_m) = i$ , les graphes distance-réguliers sont définis par les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} c_i &= \left| \mathcal{N}_m \cap \mathcal{N}_n^{(i-1)} \right|, \quad i = 1, \dots, D, \\ a_i &= \left| \mathcal{N}_m \cap \mathcal{N}_n^{(i)} \right|, \quad i = 1, \dots, D, \\ b_i &= \left| \mathcal{N}_m \cap \mathcal{N}_n^{(i+1)} \right|, \quad i = 0, \dots, D-1. \end{aligned}$$

Ces paramètres peuvent être interprétés comme suit : sachant que  $v_n$  et  $v_m$  sont à distance  $i$ , parmi les voisins de  $v_m$ ,  $c_i$  sont à distance  $i-1$  de  $v_n$ ,  $a_i$  sont à distance  $i$  et  $b_i$  sont à distance  $i+1$ .

**Exemple 1** *Un graphe cycle de  $N$  sommets est un graphe distance-régulier de valence 2.*

Une propriété importante des graphes distance-réguliers est donnée par [11] :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_i = b_{i-1}\mathbf{A}_{i-1} + a_i\mathbf{A}_i + c_{i+1}\mathbf{A}_{i+1}. \quad (2.1)$$

### 2.1.3 Nullité des graphes bipartis

Définissons tout d'abord la notion de nullité d'un graphe ainsi que celle de graphe biparti.

**Définition 2** *La nullité  $\eta(\mathcal{X})$  d'un graphe  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ , avec  $N = |\mathcal{V}|$ , est la multiplicité algébrique de zéro dans le spectre de la matrice d'adjacence du graphe. On a donc :  $\eta(\mathcal{X}) = N - \text{rang}(\mathbf{A})$ .*

**Définition 3** *Un graphe  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  est dit biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$  telle que chaque arête ait une extrémité dans  $\mathcal{V}_1$  et l'autre dans  $\mathcal{V}_2$ . On notera ce graphe  $\mathcal{X}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2; \mathcal{E})$ .*

Pour un graphe biparti  $\mathcal{X}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2; \mathcal{E})$ , la matrice d'adjacence est structurée de la manière suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{B}$ , de dimensions  $|\mathcal{V}_1| \times |\mathcal{V}_2|$ , est appelée matrice de bi-adjacence. On peut noter que dans le cas d'un graphe biparti de  $N$  sommets,  $\eta(\mathcal{X}) = N - 2\text{rank}(\mathbf{B})$  [65].

Pour déterminer la nullité d'un graphe, on peut aussi recourir à une analyse de sa structure. Pour les graphes bipartis, on a le résultat suivant :

**Theorème 1** [18] *Si un graphe biparti  $\mathcal{X}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2; \mathcal{E})$  de  $N$  sommets ne contient aucun cycle de longueur multiple de 4 alors  $\eta(\mathcal{X}) = N - 2m$ , où  $m$  est la taille du couplage maximal de  $\mathcal{X}$ .*

Un corollaire évident est que :

**Corollaire 1** *Si un graphe biparti  $\mathcal{X}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2; \mathcal{E})$  de  $N$  sommets ne contient aucun cycle de longueur multiple de 4, alors de le rang de la matrice de bi-adjacence  $\mathbf{B}$  est la taille du couplage maximal de  $\mathcal{X}$ .*

## 2.2 Quelques généralités sur les tenseurs

Tout au long de ce document, la notion de tenseur est restreinte aux tableaux multidimensionnels. Ainsi, l'ordre d'un tenseur  $\mathbb{X}$  est le nombre de dimensions de ce tableau, ou de façon équivalente le nombre d'indices des éléments définissant ce tenseur. Cette notion généralise le concept de vecteur et de matrice. Les éléments d'un tenseur d'ordre  $n$  seront notés  $x_{i_1, \dots, i_n}$ ,  $i_n = 1, 2, \dots, I_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

### 2.2.1 Représentations matricielles

La transformation d'un tenseur en matrice peut se faire en dépliant le dit tenseur. Pour un tenseur d'ordre  $N$ , il y a  $N$  dépliements verticaux possibles  $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{I_{n+1} \cdots I_N I_1 \cdots I_{n-1} \times I_n}$ , correspondants à un dépliement suivant chaque dimension (mode) du tenseur. Ainsi, l'élément  $x_{i_1, \dots, i_N}$  du tenseur est le  $(j_n, i_n)$ -ème élément de la matrice  $\mathbf{X}_n$ , le numéro de la ligne  $j_n$  étant donné par :

$$j_n = 1 + \sum_{k=1, k \neq n}^N (i_k - 1)J_k, \quad (2.2)$$

où

$$J_k = \begin{cases} \prod_{m=k+1}^{n-1} I_m, & \text{for } k = 1, \dots, n-2 \\ 1 & \text{for } k = n-1 \\ J_N \prod_{m=k+1}^N I_m, & \text{for } k = n+1, \dots, N-1 \\ \prod_{m=1}^{N-1} I_m, & \text{for } k = N \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Décomposition canonique

Un tenseur  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \cdots \times I_N}$  est de rang unité s'il peut être écrit comme étant le produit externe de  $N$  vecteurs  $\mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n}$ ,  $n = 1, \dots, N$  :

$$\mathbb{X} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \mathbf{a}^{(2)} \circ \cdots \circ \mathbf{a}^{(N)}. \quad (2.4)$$

Les éléments du tenseur sont alors donnés par :

$$x_{i_1, \dots, i_N} = \prod_{n=1}^N a_{i_n}^{(n)}. \quad (2.5)$$

La décomposition canonique d'un tenseur consiste à l'écrire comme une somme finie de tenseurs de rang unité :

$$\mathbb{X} = \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_{\cdot, r}^{(1)} \circ \cdots \circ \mathbf{A}_{\cdot, r}^{(N)}, \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{A}_{\cdot, r}^{(n)}$  la  $r$ -ème colonne de la matrice facteur  $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , l'entier positif  $R$  étant le nombre de facteurs de la décomposition. Cette décomposition est aussi appelée PARAFAC (PARAllel FACtor analysis), [35], CANDECOMP (CANonical DECOMPosition), [13], ou simplement CP (Canonical polyadic decomposition) [16]. Sous forme scalaire, elle est donnée par :

$$x_{i_1, \dots, i_N} = \sum_{r=1}^R \prod_{n=1}^N a_{i_n, r}^{(n)}, \quad (2.7)$$

$a_{i_n,r}^{(n)}$  étant les éléments de la matrice facteur  $\mathbf{A}^{(n)}$ .

La principale propriété de CP est son unicité essentielle : chaque matrice facteur est unique à une permutation des colonnes et des facteurs d'échelle près. Précisément, deux ensembles de matrices  $\{\mathbf{A}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N}$  et  $\{\tilde{\mathbf{A}}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N}$  générant le même tenseur  $\mathbb{X}$  sont telles que  $\tilde{\mathbf{A}}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)} \mathbf{\Pi} \mathbf{\Delta}_n$ , avec  $\mathbf{\Delta}_1 \cdots \mathbf{\Delta}_N = \mathbf{I}_R$ , où  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{\Delta}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , sont, respectivement, des matrices de permutation et des matrices diagonale de dimensions  $R \times R$ . Une condition suffisante pour garantir cette unicité, appelée condition de Kruskal [60, 89], stipule que

$$\sum_{n=1}^N k_{\mathbf{A}^{(n)}} \geq 2R + (N - 1), \quad (2.8)$$

$k_{\mathbf{A}}$  étant le rang de Kruskal, c'est à dire le plus grand entier tel que tout ensemble de  $k_{\mathbf{A}}$  colonnes de  $\mathbf{A}$  est indépendant. En général le rang de Kruskal est inférieur ou égal au rang d'une matrice ; l'égalité ayant cours si la matrice est de rang colonne plein.

Une seconde propriété intéressante est le lien simple entre les matrices dépliées et les matrices facteurs :

$$\mathbf{X}_n = \left( \mathbf{A}^{(n+1)} \odot \mathbf{A}^{(n+2)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(n+N-1)} \right) \mathbf{A}^{(n)T}, \quad (2.9)$$

avec la convention  $\mathbf{A}^{(k+N)} = \mathbf{A}^{(k)}$ ,  $k < N$ . La notation  $\odot$  désigne le produit de Khatri-Rao de deux matrices. Il est défini pour des matrices ayant le même nombre de colonnes comme le produit de Kronecker par colonnes. Pour deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ayant  $N$  colonnes, on a :

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\cdot,1} \otimes \mathbf{B}_{\cdot,1} & \mathbf{A}_{\cdot,2} \otimes \mathbf{B}_{\cdot,2} & \cdots & \mathbf{A}_{\cdot,N} \otimes \mathbf{B}_{\cdot,N} \end{pmatrix}.$$

On note aussi que si  $\mathbf{A}$  a  $M$  lignes, alors :

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{A}_{1\cdot}) \\ \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{A}_{2\cdot}) \\ \vdots \\ \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{A}_{M\cdot}) \end{pmatrix}.$$

### 2.2.2.1 Rang d'un tenseur

Le rang,  $\text{rang}(\mathbb{X})$ , d'un tenseur est le plus petit nombre de tenseurs de rang unité dont la somme génère  $\mathbb{X}$  [60, 39]. Lorsque la décomposition canonique est minimale,  $R = \text{rang}(\mathbb{X})$ .

La définition du rang d'un tenseur est similaire à celle du rang d'une matrice. Cependant, leurs propriétés sont différentes. Par exemple, le rang d'un tenseur peut excéder les dimensions dudit tenseur alors que le rang d'une matrice est au plus égal à la plus petite des dimensions de la matrice. Une autre différence vient du fait qu'en général on ne sait pas calculer le rang d'un tenseur. Cependant, dans certains cas, le rang de la matrice dépliée peut révéler celle du tenseur :

**Lemme 1** [58] Soit  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  un tenseur de rang  $R$ . Si les matrices facteur  $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$  associées à la décomposition canonique minimale du tenseur sont de rang plein alors les matrices dépliées  $\mathbf{X}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , sont aussi de rang plein :

$$\text{rank}(\mathbf{X}_n) = R = \text{rank}(\mathbb{X}), \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

### 2.2.2.2 Calcul de la décomposition CP

Pour un tenseur  $\mathbb{X}$  d'ordre  $N$ , calculer sa décomposition CP consiste à estimer les matrices facteur  $\mathbf{A}^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ . L'algorithme le plus utilisé est l'algorithme des moindres carrés alternés (*Alternating Least Squares (ALS)*) [35, 36]. L'idée de base de cet algorithme est de mettre à jour les matrices facteur de façon alternée. Chaque mise à jour consiste en la minimisation d'un critère des moindres carrés conditionné par les estimés précédents des autres matrices. Ce processus est répété jusqu'à convergence. Seule une convergence vers un minimum local de la fonction est garantie. Pour des matrices structurées, comme des matrices Toeplitz, nous avons introduit une solution non-itérative dans [55].



# Consensus et analyse des systèmes en réseau

---

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Consensus de moyenne en temps fini . . . . .</b>	<b>22</b>
3.1.1	Factorisation minimale de la matrice de moyennage . . . . .	24
3.1.2	Calcul distribué de la factorisation de la matrice de moyennage . . . . .	24
<b>3.2</b>	<b>Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes . . . . .</b>	<b>26</b>
3.2.1	Estimation distribuée des valeurs propres de la matrice Laplacienne d'un graphe connexe . . . . .	26
3.2.2	Estimation distribuée de la matrice d'adjacence du graphe . . . . .	34
<b>3.3</b>	<b>Observabilité . . . . .</b>	<b>38</b>
3.3.1	Condition nécessaire d'observabilité . . . . .	40
3.3.2	Caractérisation graphique de l'observabilité pour les graphes distance-réguliers . . . . .	41
<b>3.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>45</b>

---

J'ai commencé à m'intéresser au problème du consensus après mon arrivée dans l'équipe NeCS du Gipsa-Lab en 2009. Depuis lors, cette thématique, et plus largement l'analyse des systèmes en réseau, constitue l'une de mes activités de recherche principales.

Le consensus de moyenne est un problème de grand intérêt dans la synthèse d'algorithmes de calcul distribué. Ce problème a été, entre autres, étudié pour la synchronisation de systèmes multi-agents, l'équilibrage de charges dans le calcul parallèle, la coordination d'agents mobiles autonomes, et la fusion de données dans les réseaux de capteurs.

Considérons un réseau de  $N$  nœuds où chaque nœud  $i$  est caractérisé par un état  $x_i(k)$ . Le consensus consiste à minimiser le désaccord entre voisins, soit  $\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i(k) - x_j(k))$ . Le vecteur  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^N$ , d'éléments  $x_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , définissant le vecteur d'état du réseau, ce désaccord peut s'écrire :  $J = \mathbf{x}(k)^T \mathbf{L} \mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{L}$  étant la matrice Laplacienne du graphe décrivant le réseau. Une descente du gradient avec un pas  $\alpha$  conduit alors au protocole de consensus suivant :

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{L}) \mathbf{x}(k) \quad (3.1)$$

La convergence vers la moyenne de la condition initiale est assurée si le pas d'adaptation est choisi de façon adéquate :  $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$ ,  $\lambda_1$  étant la première valeur propre non nulle de  $\mathbf{L}$ . D'une manière générale, étant donné une matrice doublement stochastique  $\mathbf{W}$ <sup>1</sup> le protocole

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{W}\mathbf{x}(k) \quad (3.2)$$

est convergent vers la moyenne de la condition initiale du réseau si et seulement si la norme spectrale  $\|\mathbf{W} - \mathbf{J}_N\|$ , où  $\mathbf{J}_N = \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ , est strictement plus petite que 1. Dans ce cas :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{W}^k \mathbf{x}(0) = \mathbf{J}_N \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}.$$

Mes travaux ont tenté de répondre aux questions fondamentales suivantes :

- Comment atteindre un consensus de moyenne exact en un nombre fini d'itérations ?
- Comment exploiter les données produites durant le régime transitoire du protocole de consensus pour inférer des propriétés spectrales et topologiques du graphe représentant le réseau ?
- Les données produites pendant ce transitoire peuvent-elles permettre de reconstruire la condition initiale et donc induire une atteinte à la vie privée<sup>2</sup> ?

### 3.1 Consensus de moyenne en temps fini

La moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  s'écrivant  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_N \mathbf{x}(0)$ , en vue d'obtenir un protocole de calcul de la moyenne en un temps fini le problème à résoudre revient alors à factoriser la matrice de moyennage  $\mathbf{J}_N$ , le nombre de facteurs fixant le nombre d'itérations. Le choix des matrices facteurs est contraint par la topologie du réseau. Pour ce faire, définissons  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$  l'ensemble des matrices de dimension  $N \times N$  compatibles avec le réseau :  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} = \{\mathbf{W} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}) \circ \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N \times N}\}$ ,  $\mathbf{A}$  étant la matrice d'adjacence du graphe alors que  $\circ$  représente le produit de Hadamard<sup>3</sup>.

Il est naturel de se demander s'il existe une matrice  $\mathbf{W} \in \mathcal{S}_{\mathcal{G}}$  telle que  $\mathbf{W}^D = \mathbf{J}_N$ , pour  $D < \infty$ . La réponse est clairement non, l'unique exception étant le cas trivial du graphe complet [29]. Pour un graphe quelconque, nous avons montré les résultats suivants [49, 50] :

1. Une matrice  $\mathbf{W}$  est dite doublement stochastique si elle est positive et la somme de ses lignes ainsi que la somme de ses colonnes valent 1, c'est à dire  $\mathbf{1}^T \mathbf{W} = \mathbf{1}^T$  et  $\mathbf{W} \mathbf{1} = \mathbf{1}$ .

2. La notion de vie privée dans un contexte de systèmes en réseau correspond à l'information locale. Ainsi, dans le cas du consensus de moyenne, la condition initiale peut être une information sensible dont la connaissance en dehors du voisinage immédiat peut être considérée comme une atteinte à la vie privée.

3. Pour deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de mêmes dimensions, le produit de Hadamard est le produit élément par élément, c'est-à-dire  $[\mathbf{A} \circ \mathbf{B}]_{ij} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij}$ .

**Theorème 2** Soit un graphe connexe non-orienté de matrice Laplacienne  $\mathbf{L}$ . Il existe un polynôme  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \cdot)$ , dont les coefficients sont stockés dans le vecteur  $\mathbf{c}$ , tel que  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \mathbf{L}) = \mathbf{J}_N$ . Ce polynôme, appelé polynôme moyeneur, est au minimum de degré  $D + 1$ ,  $D$  étant le nombre de valeurs propres distinctes non-nulles de la matrice Laplacienne.

**Theorème 3** Le polynôme  $\pi(\nu) = \prod_{k=1}^D (\alpha_k - \beta_k \nu)$  paramétré par les coefficients  $(\alpha_1, \dots, \alpha_D, \beta_1, \dots, \beta_D)$  est un polynôme moyeneur du graphe connexe non-orienté de matrice Laplacienne  $\mathbf{L}$  pour le choix de coefficients suivants :  $(\alpha_k, \beta_k) = (1, \frac{1}{\lambda_k})$  ou  $(\alpha_k, \beta_k) = (\frac{\lambda_k - N_{max}}{\prod_{k=1}^D \sqrt[D]{\lambda_k}}, \frac{1}{\prod_{k=1}^D \sqrt[D]{\lambda_k}})$ ,  $k = 1, \dots, D$ ,  $\lambda_k$  étant une valeur propre de la matrice Laplacienne et  $N_{max}$  le degré maximal du graphe.

De ce théorème on peut donc déduire le résultat suivant sur la factorisation de la matrice de moyennage  $\mathbf{J}_N$  :

**Corollaire 2** Soit un graphe arbitraire de matrice Laplacienne  $\mathbf{L}$  ayant  $D$  valeurs propres non-nulles distinctes,  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, D$ . Il existe une factorisation de la matrice de moyennage sous la forme  $\mathbf{J}_N = \prod_{k=1}^D (\alpha_k \mathbf{I} - \beta_k \mathbf{L})$ . Si l'on contraint les matrices facteurs à être stochastiques alors

$$\alpha_k = 1 \quad \beta_k = \frac{1}{\lambda_k} \quad (3.3)$$

sinon

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k - N_{max}}{\prod_{k=1}^D \sqrt[D]{\lambda_k}} \quad \beta_k = \beta = \frac{1}{\prod_{k=1}^D \sqrt[D]{\lambda_k}} \quad (3.4)$$

La factorisation de la matrice de moyennage induit un protocole du type :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{W}(k+1)\mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, \dots, D-1. \quad (3.5)$$

Cette contribution a suscité deux questions majeures :

- La factorisation proposée par le corollaire 2 est-elle minimale ?
- Le calcul de cette factorisation nécessite-t-il la connaissance complète du graphe ?

### 3.1.1 Factorisation minimale de la matrice de moyennage

Déterminer la dimension minimale de la factorisation de la matrice de moyennage pour un graphe donné est une question qui est encore ouverte. Cette dimension minimale est nécessairement au moins égale au diamètre du graphe puisque celui-ci équivaut à la plus grande distance pouvant exister entre deux sommets d'un graphe, c'est-à-dire le délai minimum pour qu'une information parvienne à tous les nœuds du réseau.

[29] avait postulé une conjecture stipulant que, quel que soit le graphe, cette borne minimale peut toujours être atteinte. Cette conjecture a été infirmée dans [37] où un contre-exemple a été proposé. Pour notre part, dans [47], nous montrons que pour la famille de graphes dits distance-réguliers, la factorisation proposée par le théorème 2 permet d'atteindre la borne inférieure. En d'autres termes, le consensus de moyenne peut être réalisé en un nombre d'itérations minimal équivalent au diamètre du graphe.

Ce résultat vient du fait que le polynôme de Hoffmann<sup>4</sup> n'existe que si et seulement si le graphe est connexe et régulier. Le degré du polynôme de Hoffmann est en général inconnu sauf pour les graphes distance-réguliers [40].

### 3.1.2 Calcul distribué de la factorisation de la matrice de moyennage

Comme indiqué précédemment, étant donné un graphe  $\mathcal{G}$  le problème de la factorisation de la matrice de moyennage consiste à trouver un ensemble de matrices  $\mathbf{W}(k) \in \mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, D$  tel que  $\prod_{k=1}^D \mathbf{W}(k) = \mathbf{J}_N$ . Il est à noter qu'en adoptant une vision spatio-temporelle du processus de consensus, une représentation sous forme de réseau de neurones multi-couches peut être admise.

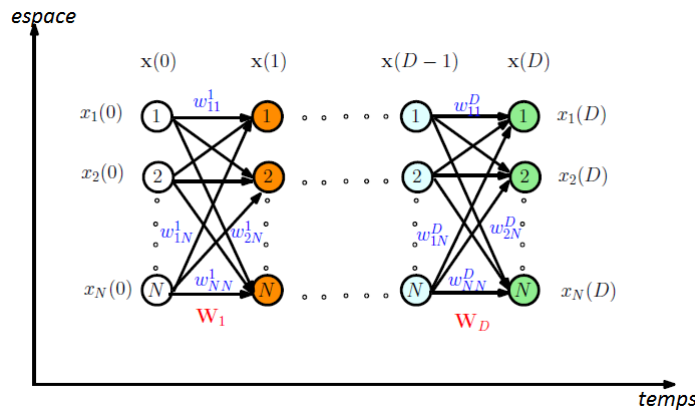


FIGURE 3.1 – Représentation sous forme de réseau de neurones multi-couches.

4. Le polynôme de Hoffman  $h(\cdot)$  est le polynôme tel que  $h(\mathbf{A}) = N\mathbf{J}_N$ ,  $\mathbf{A}$  étant la matrice d'adjacence du graphe.

La couche d'entrée reçoit  $\mathbf{x}(0)$  et la couche de sortie produit  $\mathbf{x}(D) = \mathbf{J}_N \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ . Ici la fonction d'activation est linéaire. C'est simplement la somme pondérée des informations issues de la couche précédente. La factorisation de la matrice de pondération peut donc être vue comme la synthèse d'un réseau de neurones qui fournit la moyenne de l'entrée du réseau. A partir d'un corpus d'exemples, une procédure d'apprentissage peut donc être utilisée pour obtenir les valeurs des poids synaptiques, pour reprendre la terminologie des réseaux de neurones. La rétropropagation du gradient est souvent l'algorithme utilisé pour ce type de problème. Cela sous-entend une connaissance complète du réseau. Dans le contexte des systèmes en réseau, cette connaissance est exclue. Chaque nœud du réseau ne possède qu'une information locale sur la structure du réseau et n'est alimenté que par les informations de ses voisins directs. La méthode de factorisation distribuée que je vais décrire ci-dessous s'inspire de l'apprentissage dans les réseaux de neurones, mais diffère en ce qu'elle tient compte des contraintes structurelles liées au graphe. Considérons un corpus de  $P$  exemples d'apprentissage défini par la matrice  $\mathbf{X}(0) \in \mathbb{R}^{N \times P}$  et les valeurs moyennes associées  $\mathbf{Y} = \mathbf{J}_N \mathbf{X}(0)$ . En supposant que  $\mathbf{X}(0) \mathbf{X}(0)^T = \mathbf{I}$ , nous pouvons déduire que minimiser l'erreur d'apprentissage équivaut à factoriser la matrice de moyennage :

$$\min_{\mathbf{W}(k), k=1, \dots, D} \left\| \prod_{k=D}^1 \mathbf{W}(k) \mathbf{X}(0) - \mathbf{Y} \right\|_F^2 \Leftrightarrow \min_{\mathbf{W}(k), k=1, \dots, D} \left\| \prod_{k=1}^D \mathbf{W}(k) - \mathbf{J}_N \right\|_F^2 \quad (3.6)$$

Dans [98], le problème d'optimisation ci-dessus est résolu via une descente du gradient stochastique. En supposant qu'à l'itération  $t$  l'exemple  $p(t) \in [1, 2, \dots, P]$  est choisi, on montre notamment que la matrice facteur est mise à jour de la manière suivante :

$$\mathbf{W}^{(t+1)}(k) = \mathbf{W}^{(t)}(k) - \alpha \left( \boldsymbol{\delta}_{k,p(t)} \mathbf{x}_{p(t)}^T \right) \circ (\mathbf{I} + \mathbf{A}) \quad (3.7)$$

avec

$$\boldsymbol{\delta}_{k-1,p(t)}^T = \boldsymbol{\delta}_{k,p(t)}^T \mathbf{W}^{(t)}(k), k = 1, \dots, D \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{D,p(t)} = \mathbf{x}_{p(t)}(D) - \mathbf{Y}_{.p(t)} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{x}_{p(t)}(k+1) = \mathbf{W}^{(t)}(k) \mathbf{x}_{p(t)}(k-1), \quad \mathbf{x}_{p(t)}(0) = \mathbf{X}_{.p(t)}(0).$$

Un choix adéquat du pas d'adaptation  $\alpha$  permet d'assurer une convergence vers un minimum local de la fonction de coût. On montre par ailleurs que tout minimum local de cette fonction de coût fournit une factorisation de la matrice de moyennage. On peut aussi remarquer qu'à l'instar de l'algorithme de rétropropagation du gradient, il y a deux étapes avant la mise à jour des matrices facteurs. Tout d'abord un exemple  $\mathbf{x}_{p(t)}(0) = \mathbf{X}_{.p(t)}(0)$  est propagé dans le réseau. La valeur obtenue après  $D$  étapes de propagation est comparée au résultat désiré  $\mathbf{Y}_{.p(t)}$ . L'erreur  $\boldsymbol{\delta}_{D,p(t)}$  est à son tour propagée dans le réseau. La matrice facteur est alors corrigée avec le terme  $\boldsymbol{\delta}_{k,p(t)} \mathbf{x}_{p(t)}^T$  projeté dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ . Chaque nœud ne contrôle que les poids qu'il a à attribuer à ses voisins. L'algorithme est donc complètement distribué. Etant donné qu'il n'y a aucune contrainte de stochasticité ni de symétrie, la matrice facteur obtenue

est la plus générale possible. Rajouter une contrainte de stochasticité ne complexifie pas le problème d'optimisation outre mesure. Dans tous les cas, l'algorithme souffrirait d'une lenteur de convergence inhérente à l'algorithme de rétropropagation du gradient. Il est alors possible de recourir à une relaxation ou au rajout d'un momentum :

$$\mathbf{W}^{(t+1)}(k) = \mathbf{W}^{(t)}(k) - \alpha \left( \boldsymbol{\delta}_{k,p(t)} \mathbf{x}_{p(t)}^T \right) \circ (\mathbf{I} + \mathbf{A}) + \beta \left( \mathbf{W}^{(t)}(k) - \mathbf{W}^{(t-1)}(k) \right). \quad (3.10)$$

### 3.2 Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes

Les protocoles de consensus à convergence asymptotique du type (3.2) sont les plus rencontrés dans la littérature. Ils résultent notamment de la discrétisation du protocole continu  $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{L}\mathbf{x}$ . La plupart des recherches effectuées autour de ce protocole se sont concentrées sur la question de la convergence. La question que nous nous sommes posée concerne l'exploitation du régime transitoire, qui est riche de données pouvant servir à inférer certaines propriétés du graphe. Dans [103], il est montré que chaque nœud peut utiliser les valeurs du transitoire pour résoudre le problème du consensus de moyenne. Pour notre part, nous allons utiliser ces données pour déduire d'une part les valeurs propres de la matrice Laplacienne du graphe et d'autre part la topologie du graphe, ce qui revient à estimer la matrice d'adjacence du graphe.

#### 3.2.1 Estimation distribuée des valeurs propres de la matrice Laplacienne d'un graphe connexe

Le principal problème étudié dans la littérature consiste en l'estimation distribuée de la seconde plus petite valeur propre de la matrice Laplacienne [102, 5]. Cette valeur propre joue un rôle significatif dans l'analyse de la vitesse de convergence de différents algorithmes distribués. S'agissant de l'estimation du spectre complet, à l'exception de notre contribution les seules existantes sont celles de [28, 85]. Dans ces deux papiers, le concept est de faire osciller le système autour de certaines fréquences dont la localisation dans le spectre est directement liée à la valeur des valeurs propres de la matrice Laplacienne. La FFT est donc utilisée pour l'analyse du spectre. Cependant, l'obtention des données pour la réalisation de cette analyse spectrale nécessite la mise en place de protocoles spécifiques. En d'autres termes, nous sommes en présence d'un processus d'estimation actif. Notre approche est différente car nous exploitons des données fournies par un protocole de consensus de moyenne qui fonctionne déjà. Notre approche est passive.

##### 3.2.1.1 Données multi-experience

Considérons un nœud  $i$  ayant  $N_i$  voisins. On suppose on dispose de données de  $N$  opérations de consensus et que le graphe associé au réseau est resté le même durant ces expériences. En notant  $\mathbf{X}(k) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  la matrice des états du réseau pour les

### 3.2. Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes 27

$N$  expériences et par  $\mathbf{Y}_i(k) \in \mathfrak{R}^{\bar{N}_i \times N}$  les informations auxquelles le nœud  $i$  a accès, les informations strictement locales et issues de son voisinage, avec  $\bar{N}_i = N_i + 1$ , on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(k+1) &= \mathbf{W}\mathbf{X}(k) \\ \mathbf{Y}_i(k) &= \mathbf{E}_i\mathbf{X}(k),\end{aligned}\tag{3.11}$$

avec  $\mathbf{W} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{L})$ , la matrice  $\mathbf{E}_i$ , de dimension  $\bar{N}_i \times N$  permettant de sélectionner les états observés par le nœud  $i$  et ses voisins.

Notre objectif est d'estimer le spectre de la matrice Laplacienne du graphe à partir des observations  $\mathbf{Y}_i(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, K_i$ ,  $K_i$  étant l'indice d'observabilité de la paire  $(\mathbf{W}, \mathbf{E}_i)$ . L'idée majeure est de construire à partir des observations disponibles une matrice qui ait le même spectre que la matrice  $\mathbf{I} - \alpha\mathbf{L}$ . Pour ce faire, définissons par  $\mathbf{O}_{i,K_i} \in \mathfrak{R}^{(K_i+1)\bar{N}_i \times N}$  une sous-matrice de la matrice d'observabilité :

$$\mathbf{O}_{i,K_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{L}) \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{L})^2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{L})^{K_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_i\mathbf{D} \\ \mathbf{V}_i\mathbf{D}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_i\mathbf{D}^{K_i} \end{pmatrix} \mathbf{U}^T = \bar{\mathbf{O}}_{i,K_i} \mathbf{U}^T, \tag{3.12}$$

avec  $\mathbf{V}_i = \mathbf{E}_i\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \alpha\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{A}$  résultant de la décomposition en valeurs propres de la matrice Laplacienne :  $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^T$ .

A partir des données disponibles, construisons à présent les deux matrices suivantes :

$$\bar{\mathbf{Y}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_i(0) \\ \mathbf{Y}_i(1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_i(K_i) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_i(1) \\ \mathbf{Y}_i(2) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_i(K_i + 1) \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

On peut alors montrer que :

$$\bar{\mathbf{Y}}_i = \bar{\mathbf{O}}_{i,K_i} \mathbf{C}^T \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_i = \bar{\mathbf{O}}_{i,K_i} \mathbf{D} \mathbf{C}^T,$$

avec  $\mathbf{C}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{X}(0)$ . De la théorie de l'observabilité (nous reviendrons sur cette notion un peu plus loin), dire que la paire  $(\mathbf{W}, \mathbf{E}_i)$  est observable avec un indice d'observabilité  $K_i$  revient à dire que la matrice  $\mathbf{O}_{i,K_i}$ , et donc la matrice  $\bar{\mathbf{O}}_{i,K_i}$ , sont de rang colonne plein. Si la matrice  $\mathbf{C}$  est aussi de rang plein, il est aisé de montrer que  $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_i^T & \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_i^T \end{pmatrix}^T$  est une matrice de rang colonne plein. Dès lors, en tenant compte de la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_i \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{O}}_{i,K_i} \\ \bar{\mathbf{O}}_{i,K_i} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{C}^T = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^T,$$

nous pouvons déduire que  $\tilde{\mathbf{U}}$  et  $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{O}}_{i,K_i} \\ \bar{\mathbf{O}}_{i,K_i} \mathbf{D} \end{pmatrix}$  engendrent le même espace colonne. Par conséquent ces deux matrices sont reliées via une matrice non-singulière  $\mathbf{T}$  de

sorte que :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1 \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{O}}_{i,K_i} \\ \overline{\mathbf{O}}_{i,K_i} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{T}^T, \quad \tilde{\mathbf{U}}_i \in \mathbb{R}^{(K_i+1)\tilde{N}_i \times N}, i = 1, 2.$$

On peut énoncer le lemme suivant :

**Lemme 2** *La matrice  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1}$  avec  $\mathbf{R}_1 = \tilde{\mathbf{U}}_1^T \tilde{\mathbf{U}}_1$  et  $\mathbf{R}_2 = \tilde{\mathbf{U}}_1^T \tilde{\mathbf{U}}_2$  a les mêmes valeurs propres que la matrice de consensus  $\mathbf{I} - \alpha \mathbf{L}$ .*

En effet, en définissant  $\mathbf{G} = \mathbf{T} \overline{\mathbf{O}}_{i,K_i}^T \overline{\mathbf{O}}_{i,K_i}$ , on obtient :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{G} \mathbf{T}^T \text{ et } \mathbf{R}_2 = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{T}^T \quad (3.14)$$

Par construction  $\mathbf{R}_1$  est non-singulière. On peut alors montrer que  $\mathbf{R} \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{D}$ . On en déduit que  $\mathbf{D}$  est la matrice des valeurs propres de  $\mathbf{R}$ . On peut alors résumer le principal résultat établi dans [48] comme suit :

**Théorème 4** *Considérons les observations  $\{\mathbf{Y}_i(k)\}_{k=0,1,\dots,K_i+1}$ , disponibles au nœud  $i$ , organisées dans les matrices  $\overline{\mathbf{Y}}_i$  et  $\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_i$  définies en (3.13), et la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}$  des vecteurs propres à gauche de la matrice  $(\overline{\mathbf{Y}}_i^T \quad \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_i^T)^T$ . Si la paire  $(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{L}, \mathbf{E}_i)$  est observable d'indice d'observabilité  $K_i$  et si  $\mathbf{C}$  est de rang colonne plein alors le nœud  $i$  peut déterminer le spectre de la matrice Laplacienne de la manière suivante :  $\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{I} - \mathbf{D})$ ,  $\mathbf{D}$  résultant de la décomposition en valeurs propres de la matrice  $\mathbf{R} = (\tilde{\mathbf{U}}_1^T \tilde{\mathbf{U}}_2) (\tilde{\mathbf{U}}_1^T \tilde{\mathbf{U}}_1)^{-1}$ , où  $\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1^T & \tilde{\mathbf{U}}_2^T \end{pmatrix}^T$ , les deux sous-matrices  $\tilde{\mathbf{U}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{U}}_2$  ayant le même nombre de lignes.*

En passant, on peut noter qu'en résolvant ce problème de recherche de valeurs propres, le nœud peut déduire  $\mathbf{T}^T = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{R}_1$  et, sachant que  $\tilde{\mathbf{U}}_1 = \overline{\mathbf{O}}_{i,K_i} \mathbf{T}^T$ , on a :

$$\overline{\mathbf{O}}_{i,K_i} = \tilde{\mathbf{U}}_1 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{G} \quad (3.15)$$

et

$$\mathbf{C}^T = \overline{\mathbf{O}}_{i,K_i}^\dagger \overline{\mathbf{Y}}_1. \quad (3.16)$$

Le théorème 4 stipule que si un nœud vérifie les propriétés d'observabilité dans son voisinage il est à même d'estimer les valeurs propres de la matrice Laplacienne, y compris leur multiplicité. Une observation passive du système permet donc d'avoir suffisamment d'informations pour connaître des propriétés fondamentales du graphe sous-jacent. Il est à noter que la connaissance explicite de l'indice d'observabilité n'est pas nécessaire. On sait qu'il est borné par valeurs supérieures par  $N - N_i$  [93].



## 3.2. Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes 29

### 3.2.1.2 Données mono-expérience

De l'état  $\mathbf{x}(k)$  du protocole de consensus (3.2), on peut définir  $\mathbf{q}(k) = \mathbf{L}^k \mathbf{x}(0)$  comme :

$$\mathbf{q}(k) = (q_{1,k}, \dots, q_{N,k})^T = \frac{1}{(-\alpha)^k} \left( \mathbf{x}(k) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-\alpha)^i \mathbf{q}(i) \right), \quad (3.17)$$

avec  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{x}(0)$ . Nous supposons tout d'abord que la valeur moyenne de  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_N \mathbf{x}(0)$  est connue. Le problème étudié peut donc être formulé comme suit :

*Étant donné une paire d'entrée-sortie arbitraire  $\{\mathbf{x}(0), \bar{\mathbf{x}} = \bar{x}\mathbf{1}\}$ , et les observations intermédiaires  $\mathbf{q}(k), k = 0, \dots, h$ , estimer de manière distribuée les valeurs propres de la matrice Laplacienne associée au graphe représentant le réseau.*

Soit le polynôme  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \cdot)$  de degré  $h$  et de coefficients contenus dans le vecteur  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{h+1}$ . On montre que l'égalité  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \mathbf{q}(0)) = \bar{\mathbf{x}}$  n'est obtenue que si et seulement si les inverses de toutes les valeurs propres distinctes de la matrice Laplacienne sont racines de ce polynôme. Étant données  $\bar{x}$  et les mesures intermédiaires  $\mathbf{q}(k), k = 0, \dots, h$ , il s'agit donc de trouver le polynôme qui satisfasse l'égalité ci-dessus. Il est à noter que l'évaluation du polynôme en  $\mathbf{q}(0)$  peut alternativement s'écrire :

$$\mathcal{P}(\mathbf{c}; \mathbf{q}(0)) = \sum_{k=0}^h c_k \mathbf{q}(k) = \mathbf{Q} \mathbf{c}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(0) & \mathbf{q}(1) & \dots & \mathbf{q}(h) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (h+1)}.$$

En dehors de  $\bar{\mathbf{x}}$  l'information disponible étant purement locale, chaque nœud ne dispose donc que d'une sous-matrice  $\mathbf{Q}_i \in (|N_i| + 1) \times (h + 1)$  de  $\mathbf{Q}$ . L'évaluation locale du polynôme  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \cdot)$  donnerait alors

$$\mathcal{P}(\mathbf{c}; \mathbf{E}_i \mathbf{q}(0)) = \sum_{k=0}^h c_k \mathbf{E}_i \mathbf{q}(k) = \mathbf{Q}_i \mathbf{c}.$$

Par conséquent la détermination de ce polynôme de manière distribuée revient à trouver un consensus sur des polynômes estimés localement tout en satisfaisant les contraintes d'égalité :  $\mathbf{Q}_i \mathbf{c} = \bar{x}\mathbf{1}$ .

En désignant par  $\mathbf{c}_i$  le vecteur des coefficients du polynôme au nœud  $i$ , le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\min_{\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{h+1}} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2 \quad t.q. \quad \mathbf{Q}_i \mathbf{c}_i = \bar{x}\mathbf{1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

Afin de réduire davantage l'espace de recherche des coefficients du polynôme, on peut remarquer qu'en appliquant le binôme de Newton, les coefficients de  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \cdot)$  ont des signes alternés. On peut donc rajouter une contrainte de signe sur les coefficients recherchés.

Pour résoudre ce problème d'optimisation, nous avons développé une méthode de sous-gradient projeté inspiré de [72] et une méthode de direction alternée de multiplicateurs (ADMM) [10, 26]. Je me focaliserai sur la méthode du sous-gradient puis reviendrai sur la méthode ADMM plus loin.

L'idée principale de la méthode du sous-gradient projeté distribuée est de permettre à chaque nœud  $i$  de mettre à jour son estimation après deux étapes. Tout d'abord, une étape de sous-gradient est prise en minimisant la fonction objective locale  $\frac{1}{2} \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2$ . Ensuite, le résultat intermédiaire est projeté sur l'ensemble des contraintes  $C_i$ . Par conséquent, la première étape est donnée par :

$$\hat{\mathbf{c}}_i[t+1] = \mathbf{c}_i[t] - \gamma[t] \sum_{j \in N_i} (\mathbf{c}_i[t] - \mathbf{c}_j[t]), \quad (3.19)$$

où  $\gamma[t] > 0$  est le pas d'adaptation. Quant à la seconde étape, elle nécessite le calcul de la projection  $\mathbf{c}_i[t+1] = \Omega_{C_i}[\hat{\mathbf{c}}_i[t+1]]$ . Cette étape de projection est équivalente à résoudre un problème d'optimisation sous contraintes formulé de la manière suivante :

$$\min \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{c}_i[t+1] - \hat{\mathbf{c}}_i[t+1]\|^2 \quad \text{t.q.} \quad \mathbf{Q}_i \mathbf{c}_i[t+1] = \bar{x} \mathbf{1}.$$

Pour ce faire, on définit le Lagrangien augmenté comme suit :

$$L(\mathbf{c}_i[t+1], \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{c}_i[t+1] - \hat{\mathbf{c}}_i[t+1]\|^2 + \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}_i \mathbf{c}_i[t+1] - \bar{x} \mathbf{1}).$$

On montre alors que la solution au problème donne lieu à l'équation de mise à jour suivante :

$$\mathbf{c}_i[t+1] = \bar{x} \tilde{\mathbf{Q}}_i \mathbf{1} + (\mathbf{I}_{h+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_i \mathbf{Q}_i) \hat{\mathbf{c}}_i[t+1], \quad (3.20)$$

avec  $\tilde{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{Q}_i^T (\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^T)^{-1}$ , à condition que  $h \geq d_i$  et  $\mathbf{Q}_i$  soit de rang ligne plein. Ensuite,  $\mathbf{c}_i[t+1]$  est projeté sur la contrainte de signe :

$$\mathbf{S}_o \mathbf{c}_i[t+1] = \min(\mathbf{S}_o \mathbf{c}_i[t+1], \mathbf{0}), \quad \mathbf{S}_e \mathbf{c}_i[t+1] = \max(\mathbf{S}_e \mathbf{c}_i[t+1], \mathbf{0}) \quad (3.21)$$

où  $\mathbf{S}_o$  (resp.  $\mathbf{S}_e$ ) sélectionne les composantes de  $\mathbf{c}_i[t+1]$  de rang impair (resp. pair) ; les opérateurs *max* et *min* s'appliquant par composante.

Dans le développement ci-dessus, nous avons supposé connue la valeur moyenne  $\bar{x}$  de la condition initiale du système. Dans ce qui suit, nous relaxons cette contrainte. Il s'agit alors de résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}_i, \mathbf{c}_i, i=1, \dots, N} \quad & \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2 + \frac{1-\theta}{2} \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - x_i(0))^2, \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{Q}_i \mathbf{c}_i = \bar{x}_i \mathbf{1}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.22)$$

où  $\theta$  est un paramètre scalaire ajustable ( $0 \leq \theta \leq 1$ ),  $\bar{x}_i$ -une estimation locale de la valeur moyenne. Cette fonction de coût est une combinaison convexe de deux fonctions convexes. La première prend en compte le problème du consensus de moyenne, tandis que la seconde concerne l'estimation des coefficients du polynôme dont les racines sont l'inverse des valeurs propres non-nulles distinctes de la matrice Laplacienne. La résolution de ce problème avec l'algorithme du sous-gradient projeté ne pose aucun problème. Cependant, nous allons développer une technique de résolution alternative qui rencontre un succès fulgurant ces dernières années. Il s'agit de la

### 3.2. Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes 31

méthode ADMM. Pour ce faire, nous introduisons les variables auxiliaires  $\{\mathbf{z}_{ij}, \mu_{ij}\}$ . Le problème d'optimisation convexe sous contrainte suivant est absolument équivalent au problème (3.22) :

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}_i, \mathbf{c}_i, i=1, \dots, N} \quad & \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2 + \frac{1-\theta}{2} \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - x_i(0))^2, \\ \text{s.t} \quad & \bar{x}_i = \mu_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j \in N_i. \\ & \mathbf{c}_i = \mathbf{z}_{ij}. \\ & \mathbf{S}_o \mathbf{z}_{ij} \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{S}_e \mathbf{z}_{ij} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{Q}_i \mathbf{c}_i = \bar{x}_i \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En introduisant les variables duales  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{y}$ , le Lagrangien augmenté est donné par :

$$L_{\rho_1 \rho_2}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = L_{\rho_1}(\mathbf{c}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) + L_{\rho_2}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}).$$

où :

$$\begin{aligned} L_{\rho_1}(\mathbf{c}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2 + \sum_{j \in N_i} \frac{\rho_1}{2} \|\mathbf{c}_i - \mathbf{z}_{ij}\|^2 + \sum_{j \in N_i} \mathbf{y}_{ij}^T (\mathbf{c}_i - \mathbf{z}_{ij}), \\ L_{\rho_2}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}) &= \frac{1-\theta}{2} \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - x_i(0))^2 + \sum_{j \in N_i} \frac{\rho_2}{2} (\bar{x}_i - \mu_{ij})^2 + \sum_{j \in N_i} v_{ij} (\bar{x}_i - \mu_{ij}), \end{aligned}$$

où  $\rho_1, \rho_2$  sont des termes de pénalité supposés constants.

ADMM fournit une solution itérative qui agit en cinq étapes :

1. Minimisation par rapport à la valeur moyenne du consensus  $\bar{x}_i$  :

$$\bar{x}_i[t+1] = \arg \min L_{\rho_2}(\bar{x}_i[t], \mu_{ij}[t], v_{ij}[t]). \quad (3.24)$$

2. Minimisation par rapport aux coefficients polynomiaux  $\mathbf{c}_i$  :

$$\hat{\mathbf{c}}_i = \arg \min L_{\rho_1}(\mathbf{c}_i[t], \mathbf{z}_{ij}[t], \mathbf{y}_{ij}[t]). \quad (3.25)$$

suivie d'une projection sur les contraintes d'égalité donnant :

$$\mathbf{c}_i[t+1] = \tilde{\mathbf{Q}}_i \bar{x}_i[t+1] \mathbf{1} + (\mathbf{I}_{h+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_i \mathbf{Q}) \hat{\mathbf{c}}_i[t+1]$$

comme dans le cas de l'algorithme du sous-gradient projeté.

3. Minimisation par rapport aux variables auxiliaires  $\mu_{ij}$  avec la contrainte  $\mu_{ji} = \mu_{ij}$  :

$$\mu_{ij}[t+1] = \arg \min L_{\rho_2}(\bar{x}_i[t+1], \mu_{ij}[t], v_{ij}[t]). \quad (3.26)$$

4. Minimisation par rapport aux variables auxiliaires  $\mathbf{z}_{ij}$  :

$$\mathbf{z}_{ij}[t+1] = \arg \min L_{\rho_1}(\mathbf{c}_i[t+1], \mathbf{z}_{ij}[t], \mathbf{y}_{ij}[t]). \quad (3.27)$$

5. Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange :

$$v_{ij}[t+1] = v_{ij}[t] + \rho_2(\bar{x}_i[t+1] - \mu_{ij}[t+1]). \quad (3.28)$$

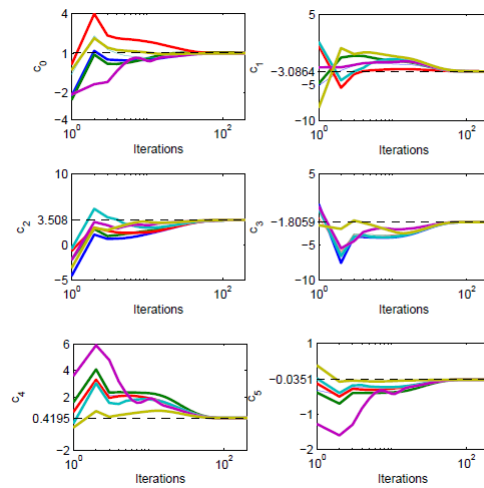
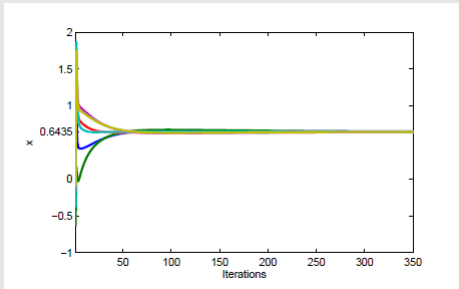
$$\mathbf{y}_{ij}[t+1] = \mathbf{y}_{ij}[t] + \rho_1(\mathbf{c}_i[t+1] - \mathbf{z}_{ij}[t+1]). \quad (3.29)$$

On notera que le paramètre  $\theta$  permet la pondération des deux fonctions de coût combinées. Puisque l'ensemble des contraintes  $C_i(\bar{x}_i) = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{h+1} | \mathbf{Q}_i \mathbf{c}_i = \bar{x}_i \mathbf{1}\}$  dépend de la valeur  $\bar{x}_i$  du consensus, la procédure d'optimisation peut d'abord donner plus de poids au problème de consensus de moyenne, puis ensuite au problème de la factorisation. Dans ce cas, au lieu de garder  $\theta$  constant, nous adoptons un coefficient variable dans le temps :

$$\theta(t) = \frac{1 - e^{-\beta t}}{1 + e^{-\beta t}} \quad (0 < \beta < 1) \quad (3.30)$$

Ce paramètre varie dans l'intervalle  $[0, 1]$  et permet d'augmenter graduellement l'importance de la factorisation tout en diminuant celle du consensus de moyenne.

**Exemple 2 :** *Considérons un réseau de 6 nœuds modélisés par un graphe connexe dont on veut estimer les valeurs propres de la matrice Laplacienne et la valeur moyenne de l'état initial. En mettant en oeuvre l'agorithme ADMM proposé. On peut noter sur les figures ci-dessous la réalisation du consensus de moyenne ainsi que l'agrément entre les nœuds sur les coefficients du polynôme à partir duquel on peut déterminer les valeurs propres de la matrice Laplacienne du graphe.*



Les trajectoires de l'état du réseau sont données sur la figure de gauche tandis que les figures de droite décrivent l'évolution de l'estimation des coefficients polynomiaux jusqu'à l'obtention du consensus.

### 3.2. Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes 33

Que la valeur moyenne  $\bar{x}$  soit connue ou non, les problèmes d'optimisation formulés précédemment permettent d'estimer les coefficients du polynôme  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \cdot)$  de la condition initiale. Cependant le degré de ce polynôme n'est en général pas connu *a priori*. De manière pratique, ce polynôme est donc surdimensionné. Sachant que les inverses des valeurs propres de la matrice Laplacienne sont forcément des racines du polynôme  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \cdot)$ , l'ensemble  $\mathcal{S}_L$  des inverses des valeurs propres de la matrice Laplacienne est donc contenu dans  $\mathcal{S} = \{r_1, \dots, r_h\}$  l'ensemble des racines de  $\mathcal{P}(\mathbf{c}; \cdot)$ . Soit  $\mathcal{Q}(\mathbf{c}_{\mathcal{S}_i}; \cdot)$  le polynôme de degré  $h$  dont les racines sont données par  $\mathcal{S}_i = \mathcal{S} \setminus \{r_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h + 1$ . Définissons par  $\mathcal{I} \{i \in \mathbb{N} | \mathcal{Q}(\mathbf{c}_{\mathcal{S}_i}; \mathbf{q}(0)) = \bar{x}\mathbf{1}\}$  l'ensemble des indices des polynômes de degré  $h$  qui vérifient encore la propriété de moyennage. Il est alors évident que :

$$\mathcal{S}_L = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_i. \quad (3.31)$$

Les inverses des éléments de  $\mathcal{S}_L$  sont donc les  $D$  valeurs propres distinctes non-nulles de la matrice Laplacienne. Cependant, contrairement au cas multi-experience, à ce stade nous ne connaissons pas encore la multiplicité de ces valeurs propres. Partant de la propriété suivante [69] : *la somme des valeurs propres de la matrice Laplacienne est égale à la somme des degrés des nœud du réseau*

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(\mathbf{L}) = \sum_{i=1}^N d_i$$

l'obtention des multiplicités s'obtient alors en résolvant le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{D*}} \quad & \Lambda^T \mathbf{m}, \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{m} = N - 1; \quad \Lambda^T \mathbf{m} = \sum_{i=1}^N d_i, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{m}$  et  $\Lambda$  désignent respectivement le vecteur des multiplicités et celui des  $D$  valeurs propres distinctes obtenues précédemment. On peut noter que la somme des degrés peut être aisément calculée de manière distribuée.

#### 3.2.1.3 Conclusion

Nous avons présenté deux approches d'estimation du spectre de la matrice Laplacienne d'un graphe. Dans la première, un nœud a suffisamment de données pour estimer ces valeurs propres en résolvant un problème de recherche de valeurs propres qui est strictement local. Dans la seconde méthode, les données disponibles localement ne sont plus suffisantes. Il est alors nécessaire de collaborer avec les autres nœud du réseau pour résoudre partiellement le problème. En effet, la collaboration n'est requise que pour l'estimation des coefficients du polynôme moyennageur. Les étapes suivantes (détermination de l'ensemble des inverses des valeurs propres puis détermination des multiplicités des valeurs propres) sont strictement locales (en supposant que la somme des degrés est connue).

### 3.2.2 Estimation distribuée de la matrice d'adjacence du graphe

En théorie des graphes, le problème inverse de base consiste à déterminer la topologie du graphe, c'est-à-dire sa matrice d'adjacence, à partir du spectre du graphe (spectre de la matrice d'adjacence) [99, 100]. Il est bien connu que le spectre du graphe (ni celui de la matrice Laplacienne) ne peut caractériser de façon unique la topologie d'un graphe. D'où la nécessité de recourir à une exploration plus profonde du graphe via les signaux mesurés au niveau de chaque nœud.

#### 3.2.2.1 Reconstruction à partir de la décomposition spectrale de la matrice Laplacienne

Dans la sous-section précédente, nous avons montré comment il était possible d'estimer le spectre de la matrice Laplacienne du graphe. Il est alors naturel d'envisager la reconstruction de la matrice Laplacienne, et par conséquent la matrice d'adjacence, via l'estimation des vecteurs propres de la matrice Laplacienne. A l'instar de l'estimation des valeurs propres, nous considérerons aussi deux scénarii :

**Données multi-expérience :** Dans la sous-section précédente, dans le cas multi-expérience, nous avons montré que chaque nœud peut résoudre localement un problème de recherche de valeurs propres qui lui fournit la matrice de valeurs propres  $\mathbf{D}$  et ainsi que  $\mathbf{G}$ , la matrice des vecteurs propres de  $\mathbf{R}$ , le problème à résoudre étant  $\mathbf{R}\mathbf{D} = \mathbf{G}\mathbf{D}$ . En plus des matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{D}$ , nous avons aussi montré que le nœud peut estimer la matrice  $\mathbf{C}$  (voir équation (3.16)). Rappelons que les observations disponibles au nœud  $i$  à l'instant  $k$  peuvent s'écrire :  $\mathbf{Y}_i(k) = \mathbf{E}_i\mathbf{U}\mathbf{D}^k\mathbf{C}^T$  ou sous la forme vectorielle

$$\text{vec}(\mathbf{Y}_i(k)) = (\mathbf{C}\mathbf{D}^k \otimes \mathbf{E}_i) \text{vec}(\mathbf{U}).$$

En supposant donc que les nœuds partagent leur identité (leur label) avec leurs voisins, on peut supposer que la matrice  $\mathbf{E}_i$  est connue du nœud  $i$ . Le problème à résoudre est donc de reconstruire la matrice des vecteurs propres de la matrice Laplacienne à partir des mesures  $\mathbf{Y}_i(k)$ .

En concaténant lesdites mesures, nous obtenons

$$\Phi_i \text{vec}(\mathbf{U}) = \psi_i \quad (3.33)$$

avec

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \otimes \mathbf{E}_i \\ \mathbf{C}\mathbf{D} \otimes \mathbf{E}_i \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{D}^{K_i} \otimes \mathbf{E}_i \end{pmatrix} \quad \psi_i = \begin{pmatrix} \text{vec}(\mathbf{Y}_i(0)) \\ \text{vec}(\mathbf{Y}_i(1)) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{Y}_i(K_i)) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Il est aisé de remarquer que le graphe n'étant pas complet, la matrice  $\Phi_i$  est de rang déficient. L'information disponible au nœud est donc insuffisante pour estimer  $\mathbf{U}$ . Cependant, si toutes les mesures étaient disponibles en un seul point alors leur concaténation donnerait :

### 3.2. Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes 35

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} \text{vec}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

On peut remarquer que

$$\left( \sum_i^N \Phi_i^T \Phi_i \right) \text{vec}(\mathbf{U}) = \sum_i^N \Phi_i^T \psi_i$$

En tant que sommes d'éléments locaux,  $\sum_i^N \Phi_i^T \Phi_i$  et  $\sum_i^N \Phi_i^T \psi_i$  peuvent être calculées via un protocole de consensus de moyenne où chaque nœud  $i$  initialise son protocole avec  $\Phi_i^T \Phi_i$  (resp.  $\Phi_i^T \psi_i$ ). Au bout du protocole, tous les nœuds ont la connaissance des matrices  $\bar{\Phi} = \frac{1}{N} \left( \sum_i^N \Phi_i^T \Phi_i \right)$  et  $\bar{\Psi} = \frac{1}{N} \sum_i^N \Phi_i^T \psi_i$ . Par suite, l'estimation de la matrice des vecteurs propres de la matrice Laplacienne est donnée par :

$$\mathbf{U} = \text{unvec}(\bar{\Phi}^{-1} \bar{\Psi}). \quad (3.36)$$

**Données mono-expérience :** Rappelons que la dynamique du réseau est donnée par le protocole de consensus

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{W}\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{W}^k \mathbf{x}(0), \quad \text{avec} \quad \mathbf{W} = \mathbf{I} - \alpha \mathbf{L}$$

La décomposition en valeurs propres de la matrice  $\mathbf{W}$  est donnée par  $\mathbf{W} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$ , où  $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \alpha \mathbf{\Delta}$ ,  $\mathbf{\Delta}$  désigne la matrice diagonale des valeurs propres de  $\mathbf{L}$ . Étant donné que les vecteurs propres de la matrice laplacienne forment une base de  $\mathbb{R}^N$ , la condition initiale  $\mathbf{x}(0)$  peut être s'écrire  $\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^N b_i \mathbf{U}_{.i} = \mathbf{U}\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N)^T$  contient les coefficients du développement sur ladite base alors que  $\mathbf{U}_{.i}$  désigne le  $i$ -ème vecteur propre, c'est-à-dire la  $i$ -ème colonne de  $\mathbf{U}$ . Par suite :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{U}\mathbf{D}^k \mathbf{U}^T \mathbf{U}\mathbf{b} = \mathbf{U}\mathbf{D}^k \mathbf{b} = \mathbf{U} \text{diag}(\mathbf{b}) \text{vecd}(\mathbf{D}^k),$$

où  $\text{vecd}(\cdot)$  est le vecteur colonne construit avec les éléments diagonaux de la matrice en argument.

Une écriture équivalent de l'équation précédente est alors donnée par :

$$\mathbf{x}(k) = \tilde{\mathbf{U}} \text{vecd}(\mathbf{D}^k), \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \text{diag}(\mathbf{b})$$

Nous pouvons noter que  $\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T = \mathbf{U} \text{diag}(\mathbf{b}^2) \mathbf{U}^T$  et  $\tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{U}} = \text{diag}(\mathbf{b}^2)$  et pouvons donc déduire la décomposition spectrale équivalente suivante pour la matrice  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{U}} \text{diag}(\mathbf{b}^2)^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^T. \quad (3.37)$$

Au nœud  $j$ , l'état à l'instant  $k$  est alors donné par :

$$x_j(k) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k(\mathbf{W}) b_i u_{j,i},$$

En concaténant  $N$  mesures consécutives, le nœud  $j$  obtient :

$$\begin{pmatrix} x_j(0) \\ x_j(1) \\ \vdots \\ x_j(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda_2(\mathbf{W}) & \cdots & \lambda_N(\mathbf{W}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_2^{N-1}(\mathbf{W}) & \cdots & \lambda_N^{N-1}(\mathbf{W}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{j,1} \\ \tilde{u}_{j,2} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{j,N} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{j,i} = u_{j,i} b_i$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{\Upsilon} \tilde{\mathbf{U}}_j^T. \quad (3.38)$$

Dans la suite, nous supposons que la matrice Laplacienne a toutes ses valeurs propres distinctes. De ce fait, nous pouvons conclure que la matrice de Vandermonde  $\mathbf{\Upsilon}$  est de rang plein. Par conséquent, le nœud  $j$  peut aisément calculer :

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^T = \mathbf{\Upsilon}^{-1} \mathbf{x}_j. \quad (3.39)$$

En somme, le nœud connaît désormais la  $j$ -ème ligne de  $\tilde{\mathbf{U}}$ . La connaissance de la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}$  est donc spatialement distribuée. Il est en conséquence nécessaire de faire collaborer les nœuds pour reconstruire cette matrice. Pour ce faire, il est possible de considérer un simple algorithme où les nœuds partagent leur connaissance de la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}$  avec leurs voisins. Après un nombre d'échanges de messages, au moins égal au diamètre du graphe, le nœud  $j$  finit par acquérir une connaissance complète de la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}$ . Contrairement au cas multi-expérience, nous supposons ici que certains nœuds sont anonymes. Bien qu'ils envoient la ligne de  $\tilde{\mathbf{U}}$  qu'ils ont estimée, ils ne partagent pas leur label avec leurs voisins. En d'autres termes, deux types de messages sont transmis dans le réseau. Les lignes de  $\tilde{\mathbf{U}}$  associées aux nœuds non-anonymes sont correctement étiquetées tandis que celles qui sont associées aux nœuds anonymes ne le sont pas. En conséquence, le nœud  $j$  a certes une connaissance complète de  $\tilde{\mathbf{U}}$  mais celle-ci n'est qu'à une permutation de lignes près, c'est-à-dire qu'il connaît désormais  $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  étant une matrice de permutation.

Sachant que  $\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} = \text{diag}(\mathbf{b}^2)$ , de l'équation (3.37), nous pouvons déduire que

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Pi} \hat{\mathbf{W}} \mathbf{\Pi}^T, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{D} (\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}})^{-1} \hat{\mathbf{U}}^T. \quad (3.40)$$

De la matrice estimée  $\hat{\mathbf{W}}$ , on obtient donc la topologie d'un graphe qui est isomorphe au graphe original. Dans ce qui suit, nous indiquons deux conditions suffisantes pour assurer la reconstruction correcte du graphe.



### 3.2. Estimation des propriétés spectrales et topologiques des graphes 37

**Theorème 5** *Supposons que le graphe est observable au noeud  $j$  (voir [51]). Si toutes les entrées de la condition initiale sont distinctes alors la topologie du réseau peut être reconstruite exactement du noeud  $j$ .*

Si la condition initiale résulte d'un tirage aléatoire d'une distribution de probabilité continue. Il est fortement probable que les éléments de la condition initiale sont tous différents et par conséquent l'anonymat des nœuds n'est pas un obstacle à la reconstruction de la topologie du graphe. Dans le cas où le système est un réseau de capteurs effectuant des mesures bruitées d'une même quantité scalaire, en supposant le bruit de mesure indépendant et spatialement non-corrélé, on réalise la condition de la proposition avec une très forte probabilité. La condition sur l'observabilité est liée à la reconstruction de l'état initial. En somme, si un nœud est capable de reconstruire l'état initial, il est en mesure de lever l'ambiguïté de permutation due à l'anonymat.

**Theorème 6** *Supposons que le réseau contient un ensemble  $\mathcal{A}$  de noeuds anonymes et le graphe est observable du noeud  $j$ . Si toutes les entrées de la condition initiale associée aux noeuds anonymes sont toutes distinctes alors la topologie de réseau peut être reconstruite exactement du noeud  $j$ .*

Ici, l'ambiguïté de permutation est limitée à des entrées associées aux noeuds anonymes.

#### 3.2.2.2 Reconstruction à partir de la matrice de corrélation dynamique du réseau

Considérons le protocole de consensus bruité suivant

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{L})\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\nu}(k). \quad (3.41)$$

Nous supposons que le bruit  $\boldsymbol{\nu}(k)$  est de covariance  $\frac{\sigma^2}{2}\mathbf{I}$ . Nous pouvons montrer que la matrice Laplacienne et la matrice de corrélation dynamique  $\mathbf{C}_R = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^K \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)$  sont reliées par [71, 84] :

$$\mathbf{L} = \left( \frac{2\alpha}{\sigma^2} (\mathbf{I} - \mathbf{J}_N) \mathbf{C}_R (\mathbf{I} - \mathbf{J}_N) + \mathbf{J}_N \right)^{-1}.$$

L'idée majeure dans ce cas est de pouvoir estimer de manière distribuée la matrice de corrélation dynamique. Pour ce faire, un estimateur de l'état du système est à développer. Dans le cas d'un graphe observable, il s'agirait alors de faire la synthèse d'un observateur suffisamment efficace en vue d'estimer l'état du système à partir des mesures partielles disponibles au niveau de chaque nœud. Un filtre de Kalman

distribué [77] devrait convenir pour ce faire. Considérons une autre approche d'estimation. Pour ce faire, rappelons que chaque nœud n'observe que  $\mathbf{y}_i(k) = \mathbf{E}_i \mathbf{x}(k)$ . On peut cependant écrire un estimateur moindres carrés de l'état du réseau comme :

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i^T \mathbf{y}_i(k) \right).$$

Une fois de plus la matrice  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i$ , et le vecteur  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i^T \mathbf{y}_i(k)$  peuvent être obtenus via un protocole de consensus de moyenne. La matrice  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i$  pouvant être calculée hors-ligne, concentrons-nous sur l'estimation du vecteur  $\mathbf{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i^T \mathbf{y}_i(k)$ . Dans [71], nous étudions et proposons un estimateur type proportionnel-intégral donné comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(k+1) = & (1 - \varepsilon\gamma) \mathbf{z}_i(k) + \varepsilon K_p \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_j(k) - \mathbf{z}_i(k)), \\ & - \varepsilon K_I \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{w}_j(k) - \mathbf{w}_i(k)) + \varepsilon \gamma \mathbf{E}_i^T \mathbf{y}_i(k) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{w}_i(k+1) = \mathbf{w}_i(k) + \varepsilon K_I \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{z}_j(k) - \mathbf{z}_i(k)), \quad (3.43)$$

où  $\mathbf{z}_i$  est l'estimé de  $\mathbf{z}$  au nœud  $i$ ,  $\mathbf{w}_i$  est l'erreur interne d'estimation,  $K_P$  et  $K_I$  sont les gains de l'estimateur,  $\varepsilon > 0$  est un pas d'adaptation et  $\gamma$  un facteur d'oubli. Cet estimateur est stable pour tout choix de paramètres tel que :

$$\varepsilon < \frac{2\operatorname{Re}(\beta_i)}{|\beta_i|^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

avec

$$\beta_i = \frac{1}{2} \left( \gamma + K_p \lambda_i(\mathbf{L}) \pm \sqrt{(\gamma + K_p \lambda_i(\mathbf{L}))^2 + 4K_I^2 \lambda_i(\mathbf{L})} \right).$$

### 3.3 Observabilité

L'objectif d'un réseau de consensus est d'obtenir un agrément entre les nœuds du réseau en partant d'une condition initiale propre à chacun des nœuds. Il se peut qu'un nœud, pour des besoins de protection de vie privée (*privacy* en anglais), ne désire pas partager sa valeur initiale au delà de son voisinage immédiat. Il y a donc lieu de se demander s'il est possible de reconstruire l'état initial du réseau à partir des mesures locales produites par le protocole du consensus. Cette question en théorie des systèmes n'est autre que la question de l'observabilité des systèmes. Dans les sections précédentes, il a souvent été question d'observabilité pour la reconstruction

de la topologie d'un graphe. Etre observable est donc nécessaire pour certaines tâches tout en étant préjudiciable à la protection de vie privée<sup>5</sup>.

Vu d'un nœud  $i$  le réseau de consensus n'est autre qu'un système linéaire homogène. L'observabilité de ces systèmes a été étudiée dès la genèse de la théorie des systèmes. Qu'y a-t-il de nouveau à étudier dans le cas des systèmes en réseau ? Le challenge tient principalement de la complexité des systèmes en réseau. Il peut être difficile de faire des tests de rang sur des matrices d'observabilité de très grande dimension. De ce fait, la tendance est à déterminer des conditions nécessaires et/ou suffisantes à partir de la topologie du réseau ou des paramètres macroscopiques caractérisant le réseau (degrés des nœuds, diamètre, etc.).

S'agissant des systèmes en réseau, différentes notions d'observabilité peuvent être énoncées : un réseau est dit

- observable d'un nœud (*node-observable*) si ce nœud peut reconstruire l'état du réseau à partir de ses seules mesures. Cette notion a été étudiée, par exemple dans [76, 80].
- observable d'un ensemble arbitraire de nœuds (*nodes set observable*) si l'état du réseau peut être reconstruit à partir des mesures issues de cet ensemble de nœuds. Ce problème a été étudié dans le papier pionnier [45] ainsi que dans [80].
- observable du voisinage d'un nœud (*neighborhood observable*) si les mesures issues du voisinage de ce nœud permettent de reconstruire l'état du réseau. C'est un cas particulier de la notion précédente mais qui s'avère plus contrainte puisqu'il n'y a pas la liberté de choix des nœuds. Nous travaillons principalement sur cette notion.
- globalement observable (*globally observable*) si pour tout nœud du réseau il est observable du voisinage de ce nœud.

Le caractère pionnier de [45] consiste en la caractérisation graphique de l'observabilité à partir d'un ensemble de nœuds en utilisant la notion de partition équitable. Cette notion se retrouve aussi dans la plupart des travaux traitant du problème dual de contrôlabilité [83, 104]. Récemment, pour l'observabilité à partir d'un nœud, une relation complète entre la taille minimale d'une partition équitable et la dimension du sous-espace observable a été établie dans [76]. En général, déterminer des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité pour des graphes arbitraires est une tâche ardue. C'est pourquoi, les contributions significatives de la littérature récente se restreignent à des familles particulières de graphes. C'est ainsi que [80, 75, 74] consacrent leur étude au cas des cercles, des chaînes, des grilles et des tores. Leur approche est basée principalement sur la théorie des nombres. Notre approche d'analyse n'est basée ni sur la notion de partition équitable ni sur la théorie des nombres. Nous exploitons la notion de distance et donc de retard de propagation ainsi que des chemins de propagation d'une information. Il est à noter que de la notion de partition équitable, on ne peut énoncer que des conditions nécessaires. Elle sous-entend qu'il faut être en mesure d'énumérer les partitions existantes. Nos conditions néces-

5. Il y a lieu de pondérer cette assertion car en cas d'observabilité, même si la structure ne permet plus la protection de vie privée, on peut cependant coder l'information de façon à la protéger comme c'est le cas avec les approches de protection de vie privée différentielle [61]

saies, elles, ne se basent que sur des variables macroscopiques du graphe (degrés, diamètre, nombre de nœuds).

### 3.3.1 Condition nécessaire d'observabilité

Rappelons le système à étudié :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{W}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}_i(k+1) &= \mathbf{E}_i\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Soit la décomposition en valeurs propres suivante :  $\mathbf{W} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$ . On peut alors récrire la matrice d'observabilité  $\mathbf{O}_i$  associée à la paire  $(\mathbf{W}, \mathbf{E}_i)$  comme

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_i\mathbf{W} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_i\mathbf{W}^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i\mathbf{U} \\ \mathbf{E}_i\mathbf{U}\mathbf{D} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_i\mathbf{U}\mathbf{D}^{N-1} \end{pmatrix} \mathbf{U}^T = (\mathbf{\Delta} \odot \mathbf{V}_i) \mathbf{U}^T,$$

où  $\odot$  désigne le produit de Khatri-Rao de deux matrices,  $\mathbf{\Delta} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est la matrice de Vandermonde dont les générateurs sont les valeurs propres de  $\mathbf{W}$ , et  $\mathbf{V}_i = \mathbf{E}_i\mathbf{U}$ . Par conséquent :

**Lemme 3** *La paire est  $(\mathbf{W}, \mathbf{E}_i)$  observable si et seulement si le produit de Khatri-Rao de la matrice de Vandermonde des valeurs propres de  $\mathbf{W}$  et de la matrice  $\mathbf{E}_i\mathbf{U}$  est de rang plein.*

Sachant que le rang d'un produit de Khatri-Rao<sup>6</sup> de deux matrices ayant  $N$  colonnes est borné par valeurs supérieures par le minimum du produit des rangs des deux matrices et du nombre de colonnes, c'est-à-dire  $\text{rang}(\mathbf{\Delta} \odot \mathbf{V}_i) \leq \min(\text{rang}(\mathbf{\Delta})\text{rang}(\mathbf{V}_i), N)$ , on peut déduire la condition nécessaire d'observabilité suivante :

**Theorème 7** *Soit un nœud de degré  $d_i$  d'un graphe dont la matrice de consensus  $\mathbf{W}$  admet  $D$  valeurs propres distinctes. Le système est observable du voisinage de ce nœud seulement si*

$$d_i + 1 \geq \frac{N}{D}. \quad (3.45)$$

Cette borne résulte du fait que le rang de la matrice de Vandermonde  $\mathbf{\Delta}$  est au maximum égal au nombre de générateurs distincts, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres distinctes.

6. Contrairement au rang du produit de Kronecker de deux matrices qui peut se déduire aisément ( $\text{rang}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{rang}(\mathbf{A})\text{rang}(\mathbf{B})$ ), on ne peut rien inférer quant au rang du produit de Khatri-Rao, dans le cas général. Cependant, il est certainement possible de déduire des résultats sur le rang du produit de Khatri-Rao de deux matrices lorsque celles-ci ont certaines propriétés structurelles (Vandermonde, Toeplitz, Hankel,...).

Un aspect intéressant de ce résultat est qu'un nœud peut évaluer sa capacité de protection de la vie privée du réseau juste en comparant le nombre de valeurs propres distinctes de sa matrice Laplacienne (obtenue en utilisant par exemple les algorithmes développés dans la section précédente) avec son degré. En effet, s'il est non-observable de son voisinage, cela signifie qu'en le piratant un attaquant n'aura accès qu'aux données du voisinage de ce nœud et ne pourra en aucun cas reconstruire l'état complet du réseau. Une telle règle peut permettre de mieux identifier les nœuds qui auraient besoin d'une protection plus forte.

Une famille de graphes pour laquelle on connaît le nombre de valeurs propres distinctes de la matrice Laplacienne est celle des graphes distance-réguliers. Dans ce cas ce nombre est égal au diamètre du graphe  $+1$ , et quel que soit le nœud  $d_i = K$ ,  $K$  étant la valence du graphe. Du point de vue d'un ingénieur désirent faire le design d'un réseau non-observable de  $N$  nœuds, il suffirait de choisir un graphe distance-régulier de valence  $K$  et de diamètre  $d$  vérifiant la condition ci-dessus. En particulier, si le graphe est fortement régulier il suffirait que  $K \geq \frac{N}{3} - 1$ .

### 3.3.2 Caractérisation graphique de l'observabilité pour les graphes distance-réguliers

En se focalisant sur les graphes distance-réguliers qui sont une famille de graphes qui inclut le cercle et les graphes fortement réguliers, nous allons dans ce qui suit déterminer des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité. Tout d'abord nous énonçons deux lemmes qui vont aider à analyser l'observabilité de manière algébrique sous le prisme d'une matrice de plus faible dimension que la matrice d'observabilité classique. Nous considérons un graphe distance-régulier de valence  $K$  et de diamètre  $D$  caractérisé par le schéma d'association  $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_D\}$  (voir Chapitre 2).

**Lemme 4** [51] *Les puissances  $\mathbf{A}^p$  de la matrice d'adjacence d'un graphe distance-régulier peuvent être représentées dans l'algèbre de Bose-Mesner de la manière suivante :*

$$\mathbf{A}^p = \sum_{j=0}^p \beta_{p,j} \mathbf{A}_j, \quad (3.46)$$

*les coefficients  $\beta_{p,j}$ , avec  $\beta_{p,p} > 0$ , dépendant uniquement des paramètres d'intersection du graphe.*

**Lemme 5** *En supposant que la première ligne de la matrice d'observation  $\mathbf{E}_i$  est le vecteur canonique  $\mathbf{e}_1^T$ , la première ligne de la matrice  $\mathbf{E}_i \mathbf{A}_l$  est une combinaison linéaire des lignes des matrices  $\mathbf{C}_n \mathbf{A}_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, l-1$ ,*

Nous pouvons alors établir le résultat suivant :

**Theorème 8** *Considérons un réseau de  $N$  nœuds représenté à l'aide d'un graphe distance-régulier de diamètre  $D$ , valence  $K$ , et schéma d'association  $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_D\}$ . La paire  $(\mathbf{W}, \mathbf{E}_i)$  du système (3.44) est observable si et seulement si :*

1. *la matrice d'observabilité de Bose-Mesner*

$$\bar{\mathbf{O}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \mathbf{E}_i^T & \cdots & \mathbf{A}_{D-1} \mathbf{E}_i^T \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{D(K+1) \times N} \text{ est de rang plein.}$$

2. *la matrice d'observabilité réduite de Bose-Mesner*

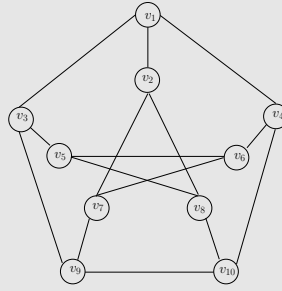
$$\tilde{\mathbf{O}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \bar{\mathbf{E}}_i^T & \cdots & \mathbf{A}_{D-1} \bar{\mathbf{E}}_i^T \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{DK \times N}, \text{ avec } \mathbf{E}_i^T = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T & \bar{\mathbf{E}}_i^T \end{pmatrix}, \text{ est de rang } N - 1$$

Les matrices d'observabilité de Bose-Mesner sont de dimension beaucoup plus petite que la matrice d'observabilité classique. Cela vient du fait que le diamètre est en général beaucoup plus petit que le nombre de nœuds. Par ailleurs ces matrices sont purement binaires. Nous pouvons donc utiliser cette caractéristique pour construire des graphes d'observabilité dont les propriétés pourront aider à établir des conditions d'observabilité ne nécessitant pas de calcul explicite de rang. Cependant, on peut remarquer que la matrice d'observabilité réduite de Bose-Mesner nous donne une condition nécessaire d'observabilité plus stricte que celle énoncée pour les graphes arbitraires.

**Corollaire 3** *Un système représenté à l'aide d'un graphe distance-régulier de  $N$  nœuds, valence  $K$  et diamètre  $D$  est observable du voisinage d'un nœud donné seulement si  $DK \geq N - 1$ .*

Pour les graphes distance-réguliers, le nombre de valeurs propres distinctes non nulles est égal au diamètre du graphe. En ce sens, on peut en effet donc déduire que la condition du théorème 7 est moins stricte. Cependant, on peut certainement étendre la condition du corollaire ci-dessus au cas général, en remplaçant le diamètre par le nombre de valeurs propres distinctes non-nulles. Qu'à cela ne tienne cette condition nécessaire d'observabilité sous-entend qu'il y a une capacité maximale de traitement d'information au voisinage d'un nœud donné. Si la dimension de l'état du système excède cette capacité maximale, il est alors impossible de reconstruire l'état du système.

**Exemple 3 :** Les "Odd graphs"  $\mathcal{O}_n$  sont une famille de graphes incluant le graphe de Petersen (voir figure ci-dessous) qui sont distance-réguliers de valence  $n$ , diamètre  $n - 1$ , et ayant un nombre de sommets  $\binom{2n-1}{n-1}$ .  $\mathcal{O}_2$  est un triangle alors que  $\mathcal{O}_3$  est le graphe de Petersen. Ces graphes ont été proposés comme topologie de réseau pour le calcul parallèle [30]. On peut noter qu'au delà de  $n \geq 3$  la condition nécessaire n'est plus vérifiée. Avec le simple outil que nous avons décrit, on peut déclarer la non-observabilité sans aucun calcul explicite de rang ou énumération de partitions équitables comme dans [45].

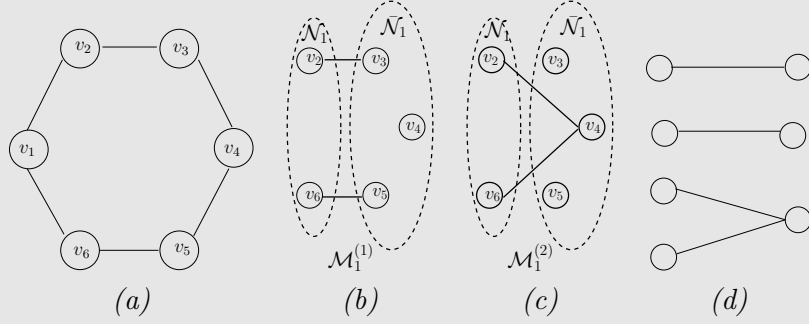


La matrice d'observabilité réduite de Bose-Mesner renseigne principalement des relations de distance entre les nœuds voisins du nœud autour duquel on analyse l'observabilité et le reste du réseau. Il y a donc un bipartisme évident qu'il serait intéressant d'exploiter. En effet, à chaque distance, on peut associer un graphe biparti. En considérant chaque distance comme une modalité en soi, nous recourons à la notion de graphe multicouche. Un graphe multi-couche est défini comme un graphe  $\mathcal{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  ayant  $M$  couches, chaque couche étant un graphe  $\mathcal{G}^{(i)}(\mathcal{V}; \mathcal{E}^{(i)})$ . Ce type de représentation a été abondamment utilisé pour modéliser des réseaux sociaux [25, 24].

**Définition 4 :** Considérons le graphe distance-régulier  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  de valence  $K$  et diamètre  $D$ , ainsi que ses graphes associés de distance  $\mathcal{X}_d(\mathcal{V}; \mathcal{E}_d)$ . Le graphe multicouche d'observabilité local associé au sommet  $v_i$  est défini comme étant le graphe multicouche  $\mathcal{M}_i(\mathcal{N}_i, \bar{\mathcal{N}}_i; E)$ ,  $E \subset \mathcal{E}$  constitué de  $(D - 1)$  couches, chaque couche  $\mathcal{M}_i^{(d)}$  étant définie comme un graphe biparti où  $u \in \mathcal{N}_i$  et  $v \in \bar{\mathcal{N}}_i$  sont adjacents si et seulement si ils le sont dans  $\mathcal{X}_d$ , c'est-à-dire. si ils sont à distance  $d$  l'un de l'autre.

**Définition 5 :** Soient  $\mathbf{B}_{i,d}$ ,  $d = 1, \dots, D - 1$ , les matrices de bi-adjacence des couches  $\mathcal{M}_i^{(d)}$  du graphe multicouche d'observabilité local  $\mathcal{M}_i(\mathcal{N}_i, \bar{\mathcal{N}}_i; E)$ , le graphe biparti d'observabilité  $\mathcal{Y}_i$  est le graphe biparti de matrice de bi-adjacence  $\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{i,1}^T & \mathbf{B}_{i,2}^T & \cdots & \mathbf{B}_{i,D-1}^T \end{pmatrix}^T$ .

**Exemple 4 :** Considérons un cercle de six nœuds. C'est un graphe distance-régulier de valence  $K = 2$  et de diamètre 3. Les deux couches du graphe multi-couche d'observabilité associé au sommet  $v_1$  sont décrites ci dessous (figures (b) et (c)). Le graphe biparti d'observabilité est quant à lui décrit par (d).



L'étude du graphe biparti d'observabilité nous permet de déduire les résultats suivants :

**Théorème 9** Considérons un réseau de  $N$  nœuds représenté par un graphe distance-régulier  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  de valence  $K$ , diamètre  $D$ , et schéma d'association  $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_D\}$ . Soit  $\mathcal{Y}_i$  le graphe biparti d'observabilité associé au nœud  $v_i$  et  $\mathbf{B}_i$  sa matrice de bi-adjacence. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- le système (3.44) est observable du voisinage du nœud  $v_i$  ;
- $\text{rang}(\mathbf{B}_i) = N - K - 1$  ;
- le graphe biparti d'observabilité  $\mathcal{Y}_n$  est de nullité  $\eta(\mathcal{Y}_n) = DK - N + 1$ .

De ce théorème, il est donc possible de conclure sur l'observabilité du système à partir du rang de la matrice de bi-adjacence du graphe biparti d'observabilité ou bien à partir de la nullité de ce graphe. Tenant compte du théorème 1 et de son corollaire 1, nous pouvons établir la condition suivante :

**Théorème 10** Considérons un réseau de  $N$  nœuds représenté par un graphe distance-régulier  $\mathcal{X}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$  de valence  $K$ , diamètre  $D$ , et schéma d'association  $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_D\}$ . Supposons que le graphe biparti d'observabilité  $\mathcal{Y}_i$  ne contient aucun cycle de longueur multiple de 4. Alors, le système est observable du voisinage du nœud  $v_i$  si et seulement si la taille du couplage maximum dans  $\mathcal{Y}_n$  est égale à  $N - K - 1$ .



**Exemple 5** *Un graphe cycle de  $N$  sommets est distance-régulier de valence 2 et diamètre  $D = N/2$  si  $N$  est pair ou  $D = (N - 1)/2$  si  $N$  est impair. On montre aisément que le graphe biparti associé à un sommet quelconque est une forêt, qui est par définition acyclique. On peut alors appliquer le théorème 10. Dans ce cas la taille du couplage maximum doit être égale à  $N - 3$ . Par ailleurs, on montre que le couplage maximum est de taille  $2(D - 2) + 1$  si  $N$  est pair et  $2(D - 2) + 2$  si  $N$  est impair. Par conséquent, on vérifie bien que la taille de ce couplage maximum vaut bien  $N - 3$  confirmant ainsi l'observabilité globale d'un graphe cycle.*

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résumé nos différentes contributions liées à l'analyse des systèmes en réseau, en particulier dans les réseaux de consensus. D'une façon synthétique les principales contributions sont les suivantes :

- Consensus en temps fini : Nous avons introduit la synthèse des algorithmes de consensus en temps fini via le paradigme de la factorisation de la matrice de moyennage. Une factorisation possible est basée sur le spectre de la matrice Laplacienne du graphe. Ce résultat a été récemment étendu en utilisant la notion de filtre graphique par [87]. Ce résultat a en outre réactivé les études sur les conditions d'existence de la factorisation de la matrice de moyennage et en particulier d'infirmier la conjecture énoncée dans [29]. La question de l'existence de la factorisation de la matrice de moyennage a ensuite été récemment étudiée dans le cas où les facteurs sont contraints à être stochastiques avec une diagonale positive [38].
- Estimation distribuée du spectre de la matrice Laplacienne d'un graphe : L'approche originale considérée dans la thèse de Dung Tran, était de poser le problème de l'estimation des valeurs propres de la matrice Laplacienne comme étant un problème de factorisation de la matrice de moyennage. Ce problème de factorisation a ensuite été résolu via des techniques d'optimisation distribuée. Une autre solution apportée durant mes travaux a été de formuler ce même problème comme étant un problème de recherche de valeurs propres d'une matrice construite avec les observations locales du transitoire de plusieurs expériences de consensus.
- Estimation distribuée de la topologie d'un réseau : selon les ressources disponibles nous avons développé différentes approches de reconstruction de la topologie du réseau à partir des seules observations. En quelque sorte, il s'agit de méthodes aveugles d'identification.
- Caractérisation de l'observabilité dans les graphes distance-réguliers : nous

avons caractérisé la condition nécessaire d'observabilité des graphes distance-réguliers ne requérant que les propriétés macroscopiques du graphe que sont le diamètre, la valence et le nombre de nœuds du graphe. Puis des conditions nécessaires et suffisantes ont été énoncées en se basant sur des constructions innovantes de graphes bipartis d'observabilité.

Ces résultats ont été obtenus grâce à la collaboration avec :

- Doctorants et post-doctorants : T.M. Dung Tran, F. Morbidi
- Enseignant-Chercheur : Christian Commault (Gipsa-Lab)

Ils ont donné lieu aux cinq principales publications suivantes

- A.Y. KIBANGO, "Finite-time average consensus based protocol for distributed estimation over AWGN.", Proc. 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (IEEE CDC-ECC 2011), Orlando, FL, USA, December, 2011.
- A.Y. KIBANGO, "Step-size sequence design for finite-time average consensus in secure wireless sensor networks", Systems and Control Letters, vol. 67, pp. 19-23, 2014.
- T.M.D. TRAN and A.Y. KIBANGO, "Distributed estimation of Laplacian eigenvalues via constrained consensus optimization problems", Systems and Control Letters, vol. 80, pp. 56-62, 2015.
- F. MORBIDI and A.Y. KIBANGO, "A distributed solution to the network reconstruction problem", Systems and Control Letters, No. 70, pp. 85-91, 2014.
- A.Y. KIBANGO and C. COMMAULT, "Observability in connected strongly regular graphs and distance regular graphs", IEEE Trans. on Control of Network Systems, Vol. 1, No 4, pp. 360-369, 2014.

# Structures nonlinéaires et multilinéaires pour les systèmes en réseau

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Identification structurelle des systèmes nonlinéaires en blocs</b>	<b>48</b>
<b>4.2</b>	<b>Identification conjointe de la topologie et des données d'un système en réseau . . . . .</b>	<b>54</b>
4.2.1	modélisation tensorielle . . . . .	55
4.2.2	Collaboration en réception . . . . .	56
<b>4.3</b>	<b>Traitement distribué des tenseurs de grandes dimensions .</b>	<b>60</b>
4.3.1	Formulation du problème et solution proposée . . . . .	62
<b>4.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>66</b>

Pendant la soutenance de ma thèse de doctorat, les échanges que j'eus avec les membres du jury accrurent mon intérêt pour les systèmes non-linéaires structurés en blocs<sup>1</sup>. Entre-temps, je m'étais aussi intéressé aux décompositions tensorielles et à leur relation possible avec les noyaux de Volterra, qui à l'ordre supérieur à deux peuvent être vus comme des tenseurs. Sachant que les séries de Volterra constituent des approximateurs universels des fonctions nonlinéaires continues sur un intervalle fermé, j'ai été amené à développer un axe de recherche liant nonlinéarité et multilinéarité.

Dans le chapitre précédente, les aspects liés à la communication ont été intégrés dans l'étude des systèmes en réseau sous le prisme d'un graphe témoignant du succès d'une communication ou non. Dans ce chapitre, nous allons mener une analyse de la communication au niveau de la couche physique du modèle OSI (*Open Systems Interconnection*). Pour ce faire, considérons un système linéaire de réponse impulsionnelle finie  $l(\cdot)$  qu'on désire analyser via un réseau de communication. La mesure de la sortie du système n'est accessible au niveau du centre de calcul qu'à travers un réseau de communication. Les questions suivantes ont alimenté nos travaux :

- peut-on identifier la structure de la chaîne complète à partir des mesures des signaux d'entrée et sortie ?

1. On retrouve, entre autres, ces structures dans les chaînes de transmission satellitaires et pour les radiocommunications via la fibre optique.

- peut-on reconstituer le signal d'entrée à partir des seuls signaux de sortie ?
- peut-on conjointement estimer la structure du réseau et les données alimentant le réseau ?

Il est à noter que pour un meilleur rendement en puissance les amplificateurs de puissance présents dans les point d'accès des canaux descendants (stations de base des systèmes cellulaires et répéteurs des liaisons satellitaires) sont utilisés à leur maximum de capacité. Cela induit un comportement nonlinéaire représenté par un modèle statique (sans mémoire) ou dynamique (avec mémoire). Le système global est nonlinéaire structuré en bloc. Cette structure en bloc se retrouve aussi dans le cas où un système linéaire est observé à travers un capteur nonlinéaire, la mesure du capteur étant ensuite transmise via un canal sans fil à un centre de calcul distant. Pour tenir compte des propagations à trajets multiples, le canal peut alors être représenté comme un filtre à réponse impulsionnelle finie.

#### 4.1 Identification structurelle des systèmes nonlinéaires en blocs

Les systèmes nonlinéaires formés par une cascade de systèmes linéaires dynamiques et nonlinéaires statiques ont été abondamment étudiés durant ces trois dernières décennies (voir [31] et les références bibliographiques incluses). Trois types de modèles nonlinéaires structurés en blocs sont souvent rencontrés : le modèle de Wiener-Hammerstein (une nonlinéarité statique prise en sandwich entre deux systèmes linéaires dynamiques), le modèle de Wiener (un système linéaire dynamique suivi d'une nonlinéarité statique) et le modèle de Hammerstein (dual du précédent obtenu en inversant l'ordre des deux sous-systèmes).

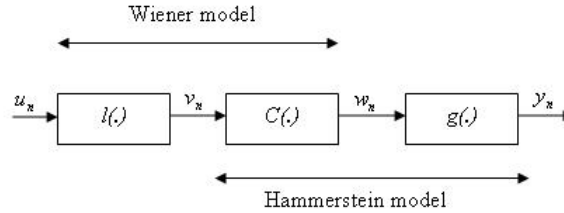


FIGURE 4.1 – Système nonlinéaire en blocs

En supposant que la nonlinéarité est une fonction continue, grâce au théorème d'approximation de Weierstrass, elle peut être approximée par un polynôme  $C(\cdot)$  de degré  $P$  et de coefficients  $c_p$ . On a alors :

$$v_n = \sum_{i=0}^{M_l-1} l_i u_{n-i}, \quad w_n = \sum_{p=1}^P c_p v_n^p, \quad y_n = \sum_{i=0}^{M_g-1} g_i w_{n-i} \quad (4.1)$$

avec  $l_0 = g_0 = 1$ , une contrainte classique permettant de garantir l'unicité du modèle. On peut noter que le cas  $M_l = 1$  correspond à un modèle de Hammerstein, alors que  $M_g = 1$  correspond à un modèle de Wiener. La structure est ainsi complètement caractérisée par l'ordre des blocs linéaires.

$$\begin{aligned} M_l = 1 & \Rightarrow \text{modèle de Hammerstein} \\ M_g = 1 & \Rightarrow \text{modèle de Wiener} \\ M_l > 1 \text{ et } M_g > 1 & \Rightarrow \text{modèle de Wiener - Hammerstein (WH)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il est d'usage de convertir ce modèle nonlinéaire en ses paramètres en un modèle de Volterra présentant l'avantage d'être linéaire en ses paramètres :

$$y_n = \sum_{p=1}^P \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{M_v-1} h_{i_1, \dots, i_p}^{(p)} \prod_{k=1}^p u_{n-i_k} \quad (4.3)$$

où  $h^{(p)}$  désigne le noyau de Volterra d'ordre  $p$ . Nous avons montré dans [54] que pour un modèle WH

$$h_{i_1, \dots, i_p}^{(p)} = c_p \sum_{j=0}^{M_g-1} g_j \prod_{k=1}^p l_{i_k-j}, \quad (4.4)$$

$i_k = 0, \dots, M_v - 1$ , pour  $k = 1, \dots, p$ , avec

$$M_v = M_l + M_g - 1 \quad (4.5)$$

la mémoire du système nonlinéaire supposée être connue. Il est à noter qu'à partir de (4.4), on peut déduire les expressions des noyaux dans les cas Wiener et Hammerstein. Dans le premier cas, il suffit de poser  $g_j = \delta_{j,0}$  et dans le second cas  $l_{i_k-j} = \delta_{i_k,j}$ ,  $\delta_{i,j}$  étant le symbole de Kronecker. On obtient donc :

$$h_{i_1, \dots, i_p}^{(p)} = c_p \prod_{k=1}^p l_{i_k}, \quad (4.6)$$

pour un modèle de Wiener et

$$h_{i_1, \dots, i_p}^{(p)} = c_p \sum_{j=0}^{M_g-1} g_j \prod_{k=1}^p \delta_{i_k,j}, \quad (4.7)$$

pour un modèle de Hammerstein.

Le modèle de Volterra étant linéaire en ses paramètres, l'estimation des noyaux est une tâche qui peut être réalisée à l'aide des estimateurs paramétriques utilisés pour des systèmes purement linéaires. Nous supposons donc connus les noyaux de Volterra d'un ordre arbitraire  $p \geq 3$ . Dans ce cas, comme indiqué précédemment, ce noyau peut être vu comme un tenseur symétrique d'ordre  $p$ .

*L'analyse du noyau de Volterra, vu comme un tenseur, permet-elle de déduire la structure du système ?*

Nous avons montré que le noyau de Volterra associé au type de système nonlinéaire en blocs que nous considérons admet naturellement une décomposition canonique (voir chapitre 2). Cependant, cette décomposition n'est pas nécessairement minimale (voir [58]). Dans le théorème ci-dessous nous introduisons une transformation permettant de garantir une décomposition minimale. Pour ce faire, pour un vecteur  $\mathbf{x} = (x_0 \ \cdots \ x_{N-1})^T$ , nous utiliserons la notation  $\mathcal{T}_{M+N,N}(\mathbf{x})$  pour représenter la matrice de Toeplitz de première colonne  $(x_0 \ \cdots \ x_{N-1} \ 0 \ \cdots \ 0)^T$  et de première ligne  $(x_0 \ 0 \ \cdots \ 0)$ .

**Théorème 11** Soient un système nonlinéaire en blocs de mémoire  $M_v$  et de noyau de Volterra d'ordre  $p$ ,  $h^{(p)}(.)$  et  $f_i$ ,  $i = 0, \dots, M_f - 1$ , une séquence aléatoire indépendante et identiquement distribuée à valeurs non-nulles prises dans un ensemble infini. Le tenseur d'ordre  $p$ ,  $\bar{\mathbb{X}}_p \in \mathbb{R}^{\bar{M}_v \times \cdots \times \bar{M}_v}$ , avec  $\bar{M}_v = M_v + M_f - 1$ , défini par

$$\bar{x}_{i_1, \dots, i_p} = \sum_{i=0}^{M_f-1} f_i h_{i_1-i-1, \dots, i_p-i-1}^{(p)}, \quad (4.8)$$

ou de façon équivalente :

$$\bar{x}_{i_1, \dots, i_p} = \sum_{m=1}^{\bar{M}_g} \prod_{k=1}^p a_{i_k, m}^{(k)}, \quad (4.9)$$

$i_k = 1, \dots, \bar{M}_v$ ,  $k = 1, \dots, p$ , avec

$$a_{i_k, m}^{(k)} = \begin{cases} l_{i_k-m} & \text{for } k = 1, \dots, p-1 \\ c_p \bar{g}_{m-1} l_{i_p-m} & \text{for } k = p \end{cases} \quad (4.10)$$

et  $\bar{g}_m = \sum_{i=0}^{M_f-1} f_i g_{m-i}$

admet une décomposition canonique minimale de rang  $\bar{M}_g = M_f + M_g - 1$ , et de matrices facteurs de rang colonne plein

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{cases} \bar{\mathbf{L}} & \text{for } k = 1, \dots, p-1 \\ c_p \bar{\mathbf{L}} \text{diag}(\bar{\mathbf{g}}) & \text{for } k = p \end{cases}, \quad (4.11)$$

avec  $\bar{\mathbf{L}} = \mathcal{T}_{\bar{M}_v, \bar{M}_g}(\mathbf{l})$ ,  $\bar{\mathbf{g}} = \mathcal{T}_{\bar{M}_g, M_g}(\mathbf{f})\mathbf{g}$ ,  $\bar{\mathbf{l}} = (l_0 \ \cdots \ l_{M_f-1})^T$ ,  $\bar{\mathbf{g}} = (\bar{g}_0 \ \cdots \ \bar{g}_{M_g-1})^T$  et  $\mathbf{f} = (f_0 \ \cdots \ f_{M_f-1})^T$ .

Puisque  $\text{rank}(\bar{\mathbb{X}}_p) = \bar{M}_g$ , et que  $\bar{M}_g = M_f + M_g - 1$  ou  $\bar{M}_g = \bar{M}_v - M_l + 1$ , le rang du tenseur  $\bar{\mathbb{X}}_p$  peut donc être utilisé pour déduire l'ordre des sous-systèmes linéaires et par conséquent déduire la structure du système nonlinéaire en blocs. En effet, en considérant les trois cas énoncés en (4.2) nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned}
 \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) = \bar{M}_v &\Rightarrow \text{Modèle de Hammerstein} \\
 \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) = M_f &\Rightarrow \text{Modèle de Wiener} \\
 M_f < \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) < \bar{M}_v &\Rightarrow \text{Modèle de WH}
 \end{aligned}$$

Comme indiqué au Chapitre 2, contrairement aux matrices, il n'existe pas d'outils numériques permettant de calculer le rang d'un tenseur. Cependant, les matrices facteurs étant toutes de rang colonne plein, par application du lemme 1, le rang de  $\bar{\mathbf{X}}_p$  n'est autre que celui de la matrice dépliée  $\bar{\mathbf{X}}_p \in \mathbb{R}^{\bar{M}_v^{p-1} \times \bar{M}_v}$  :

$$\bar{\mathbf{X}}_p = \left( \mathbf{A}^{(1)} \odot \mathbf{A}^{(2)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(p-1)} \right) \mathbf{A}^{(p)T}$$

On a donc :

$$\text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) = M_{\bar{g}} = \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p). \quad (4.12)$$

La table 4.1 décrit l'algorithme d'identification structurelle basée sur l'évaluation du rang d'un tenseur noyau de Volterra.

TABLE 4.1 – TENSOR-based Structure IDentification (TENSID) algorithm  
Etant donné un noyau d'ordre  $p \geq 3$  du modèle de Volterra associé à un système nonlinéaire de mémoire  $M_v$ .

1. Générer le vecteur  $\mathbf{f}$  de coefficients aléatoires non-nuls  $f_i$ ,  $i = 0, \dots, M_f - 1$ , avec  $M_f \geq M_v$ .
2. Générer le tenseur  $\bar{\mathbf{X}}_p \in \mathbb{R}^{\bar{M}_v \times \dots \times \bar{M}_v}$ , avec  $\bar{M}_v = M_f + M_v - 1$ , à partir du noyau de Volterra et de  $\mathbf{f}$  en utilisant (4.8).
3. Construire la matrice dépliée  $\bar{\mathbf{X}}_p$  suivant le mode  $p$  du tenseur  $\bar{\mathbf{X}}_p$ .
4. Déterminer le rang du tenseur  $\bar{\mathbf{X}}_p$  comme  $\text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) = \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p)$ .
5. Dédire la structure du système à identifier :
  - $\text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) = \bar{M}_v \Rightarrow$  Hammerstein
  - $\text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) = M_f \Rightarrow$  Wiener
  - $M_f < \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) < \bar{M}_v \Rightarrow$  WH
 ainsi que les ordres des sous-systèmes linéaires  $M_l = \bar{M}_v - \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) + 1$  et  $M_g = \text{rank}(\bar{\mathbf{X}}_p) - M_f + 1$ .

En pratique, l'estimation du noyau de Volterra est entachée d'erreurs pouvant impacter l'évaluation du rang du tenseur. Dans [56], une règle consistant à écarter les plus petites valeurs singulières de  $\bar{\mathbf{X}}_p$  fut considérée : le rang  $r$  est choisi comme étant le plus petit entier tel que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{\bar{M}_v} \sigma_i \leq \sum_{i=1}^k \sigma_i, \quad (4.13)$$

$\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, \bar{M}_v$ , désignant les valeurs singulières de  $\bar{\mathbf{X}}_p$ , ordonnées de manière décroissante alors que  $\varepsilon$  est une constante proche de 1. Dans la suite, l'algorithme TENSID intégrant ce critère numérique d'évaluation de rang sera appelé TENSID-I. Il est à noter que les erreurs d'estimation du noyau de Volterra ont aussi pour conséquence de faire de  $\bar{\mathbf{X}}_p$  une matrice de rang colonne plein, ce qui revient à avoir  $\text{rang}(\bar{\mathbf{X}}_p) = \bar{M}_v$ , conduisant ainsi à la sélection du modèle de Hammerstein comme structure. Cependant, sachant que le modèle de Hammerstein est associé à un tenseur diagonal, nous incorporons une mesure du caractère diagonale du tenseur au processus de décision. Pour ce faire, on peut vérifier que la somme quadratique des valeurs diagonales est strictement plus grande que celle des valeurs hors-diagonale. Nous définissons la mesure suivante :

$$D(\bar{\mathbf{X}}_p) = 1 - \frac{\|\mathbf{S}^T \text{diag}(\text{vecd}(\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}_p))\|_F^2}{\|\bar{\mathbf{X}}_p\|_F^2}. \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{S}$  désigne une matrice de sélection de lignes de dimensions adéquates. Cette mesure s'annule lorsque le tenseur est diagonal.

Nous couplons cette mesure avec un critère d'évaluation de rang pour des matrices à rang déficient proposé dans [62] : le rang est déterminé comme

$$\hat{M}_{\bar{g}} = \arg \min_i \rho(i), \quad \rho(i) = \begin{cases} \frac{\sigma_{i+1}^2}{\sigma_i^2 - 2\sigma_{i+1}^2} & \text{si } \sigma_{i+1}^2 \leq \frac{\sigma_i^2}{3} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.15)$$

Ainsi, la procédure d'évaluation du rang est la suivante :

1. Déterminer le rang  $r$  de  $\bar{\mathbf{X}}_p$  (en utilisant MATLAB par exemple).
2. Si  $r = \bar{M}_v$ , calculer la mesure  $D(\bar{\mathbf{X}}_p)$  définie en (4.14).
3. Si  $D(\bar{\mathbf{X}}_p) \approx 0$ , alors  $\hat{M}_{\bar{g}} = \bar{M}_v$  puis arrêter la procédure ; sinon aller à 4)
4. Calculer le rang  $\hat{M}_{\bar{g}}$  de  $\bar{\mathbf{X}}_p$  en utilisant (4.15).

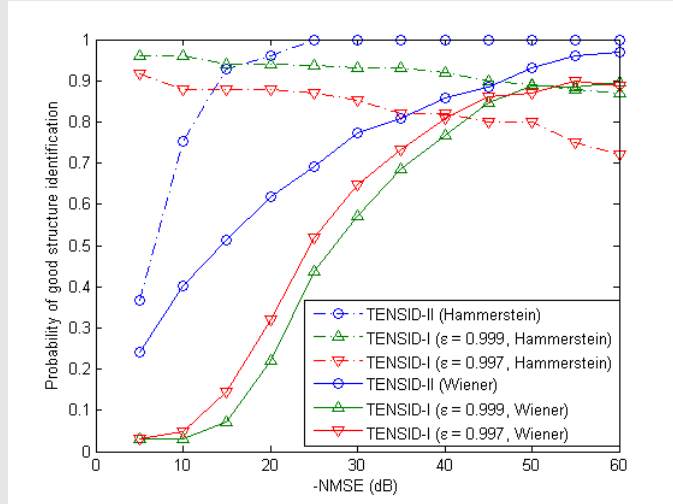
L'algorithme TENSID avec ce schéma d'évaluation de rang est désigné dans la suite TENSID-II (voir les exemples 6 et 7 ci-après).

La méthode décrite dans ce paragraphe sous-entend une estimation préalable du noyau de Volterra. Bien que ce modèle soit linéaire en ses paramètres, les méthodes d'estimation classique perdent en performance du fait d'une part de la complexité paramétrique élevée, d'une part, et du mauvais conditionnement des matrices d'autocorrélation. Pour des entrées de type *IID*, nous avons développé des estimateurs algébriques efficaces pour des modèles de Volterra d'ordre 5 [57]. Dans le cas des systèmes structurés en blocs, le noyau de Volterra vu comme tenseur peut aussi être utilisé pour estimer les paramètres des sous-systèmes linéaires. Pour ce faire, il faut calculer les matrices facteurs de la décomposition canonique du tenseur. En général, ce calcul se fait via la méthode des moindres carrés alternés, méthode qui souffre de convergence lente. Lorsque l'un des facteurs a une structure Toeplitz (comme c'est le cas pour le tenseur noyau de Volterra associé à un système nonlinéaire en blocs), nous avons développé une approche de calcul non itérative dénommée *TOMFAC*



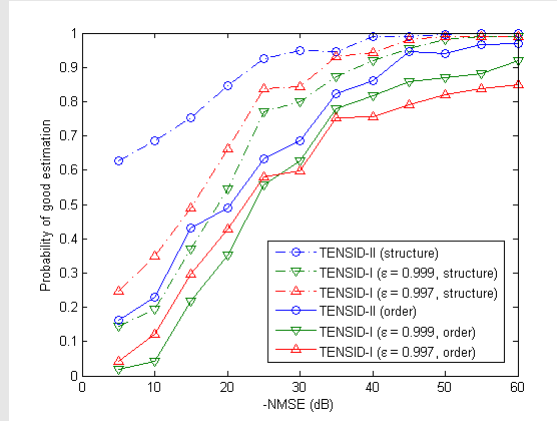
[55]. C'était la première fois dans la littérature que la prise en compte de la connaissance *a priori* de la structure des matrices facteurs était intégrée de façon explicite dans le calcul des décompositions CP. Le concept a ensuite été étendu dans [17].

**Exemple 6** Considérons 100 systèmes de type Wiener ou Hammerstein de mémoire  $M_v = 6$ . Les réponses impulsionnelles  $l(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  ainsi que les coefficients polynomiaux  $c_p$  sont générés aléatoirement (distributions gaussiennes). En vue de simuler les erreurs d'estimation des noyaux de Volterra, indépendamment de la méthode d'estimation, du bruit blanc gaussien est rajouté au noyau théorique. Pour chaque système et chaque valeur de  $NMSE = 10 \log_{10} \frac{\|\mathbb{E}_p\|_F^2}{\|\mathbb{X}_p\|_F^2}$ ,  $\mathbb{E}_p$  étant le tenseur bruit représentant l'erreur d'estimation, 100 expériences de Monte Carlo indépendantes sont réalisées. Les coefficients  $f_i$ ,  $i = 0, \dots, M_f - 1$ , avec  $M_f = M_v$ , sont aussi générés d'une distribution gaussienne. Notons que la décision sur le caractère diagonal d'un tenseur est prise si la mesure (4.14) est inférieure à  $10^{-3}$ .



La figure ci-dessus décrit la probabilité de succès dans la sélection de la structure du système pour les deux variantes de TENSID. On peut noter qu'en général la structure Hammerstein est beaucoup mieux identifiée que la structure Wiener. Ceci est dû au fait qu'en présence de bruit, la matrice dépliée  $\tilde{\mathbf{X}}_p$  est presque toujours de rang plein. On notera aussi que TENSID-II donne de meilleurs résultats que TENSID-I. Dans le cas Hammerstein, pour des niveaux de bruit élevés, TENSID-I donne de meilleurs résultats car le tenseur devient non-diagonal tout en préservant son caractère rang plein. Une fois que la mesure du caractère diagonal donne des valeurs trop élevées, TENSID-II rejette la structure Hammerstein, ce qui explique le défaut de performance observé. Il est donc nécessaire de trouver un meilleur équilibre entre les mesures (4.14) et l'évaluation du rang (4.15).

**Exemple 7** Dans les mêmes conditions de simulation que précédemment, nous considérons à présent des systèmes de type Wiener-Hammerstein. Nous évaluons non seulement l'identification structurelle mais aussi l'estimation de l'ordre de chaque sous-bloc linéaire. Nous fixons  $M_l = 3$  et  $M_g = 4$ .



La figure ci-dessus décrit la probabilité de sélection réussie de la structure WH mais aussi de l'ordre des sous-systèmes linéaires. Sachant que pour un modèle WH, le rang du tenseur est compris entre  $M_f$  et  $\bar{M}_v$ , une sélection correcte de la structure peut cependant être accompagné d'une mauvaise évaluation de l'ordre des sous-systèmes linéaires. Comme dans le cas précédent, TENSID-II performe mieux que TENSID-I. Le gap de performance entre l'identification de la structure et l'estimation de l'ordre du modèle décroît avec le NMSE. Autrement dit, plus le noyau est bien estimé, plus la structure et l'ordre sont bien estimés.

Dans la suite, nous allons considérer une modélisation multilinéaire dans des scénarii de type multi-entrées multi-sorties (MIMO)

## 4.2 Identification conjointe de la topologie et des données d'un système en réseau

A présent, considérons un cas d'étude où la structure du système et les entrées sont inconnues et sont à reconstruire à partir des seules sorties. Précisément, nous considérons un scénario dans lequel plusieurs  $M$  nœuds d'un réseau échangent des données, réalisant ainsi un codage en réseau, puis les transmettent périodiquement à un centre de fusion. Les séquences transmises sont des blocs de  $N$  échantillons.

L'objectif est d'estimer la topologie du réseau ainsi que les données d'intérêt. Après l'étape de collaboration, les nœuds transmettent simultanément vers le centre de fusion qui est supposé être doté d'un réseau d'antennes.

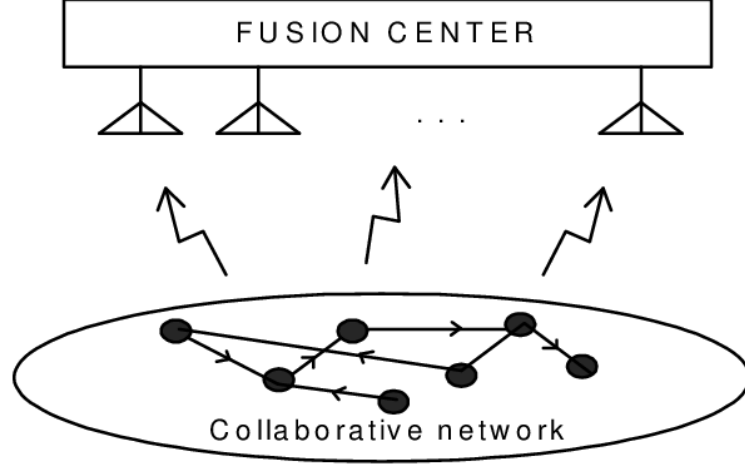


FIGURE 4.2 – Scénario considéré.

#### 4.2.1 modélisation tensorielle

Tout d'abord, chaque nœud  $m$  applique un codage temporel en étalant sa donnée scalaire  $s_m(n)$  sur  $P$  intervalles temporels. Du point de vue du réseau, la matrice  $\mathbf{X}_n$  des  $M$  séquences codées peut alors s'écrire :

$$\mathbf{X}_n = \text{diag}(\mathbf{s}_n) \mathbf{C}^T \in \mathbb{C}^{M \times P}, \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{s}(n) \in \mathbb{C}^M$  contient les données d'intérêt issues du réseau et  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{P \times M}$  est la matrice de codage. A ce stade, le codage est strictement local. La matrice de codage est choisie comme étant une matrice de Vandermonde dont les entrées sont  $c_{k,m} = e^{j2\pi(k-1)(m-1)/M}$ . Ensuite, le protocole de codage en réseau considéré consiste simplement à ajouter aux données en un nœud la somme des données reçues des voisins. Ainsi, les séquences codées en réseau sont données par la matrice

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \Phi \mathbf{X}_n = \Phi \text{diag}(\mathbf{s}_n) \mathbf{C}^T, \quad (4.17)$$

où  $\Phi = \mathbf{I} + \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$  désignant la matrice d'adjacence du graphe.

Les données codées en réseau sont ensuite transmises au centre de fusion via un canal sans-fil à évanouissement plat défini par la matrice  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{K \times M}$  supposée être constante durant la transmission du bloc de données. Au centre de fusion, on reçoit donc :

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{H} \bar{\mathbf{X}}_n + \mathbf{V}_n = \mathbf{H} \Phi \text{diag}(\mathbf{s}_n) \mathbf{C}^T + \mathbf{V}_n \in \mathbb{C}^{K \times P}, \quad (4.18)$$

$\mathbf{V}_n \in \mathbb{C}^{K \times P}$  est la matrice du bruit, supposé être blanc et gaussien.

Soit  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N]^T \in \mathbb{C}^{N \times M}$  la matrice dans laquelle toute l'information utile issue des capteurs est concaténée. A partir des données reçues  $\mathbf{Y}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , l'objectif du centre de fusion est d'estimer conjointement la matrice  $\mathbf{S}$  et la matrice  $\Phi$ . Chaque matrice  $\mathbf{Y}_n$  peut être vue comme étant une tranche d'un tenseur d'ordre 3. Les matrices  $\mathbf{H}\Phi$ ,  $\mathbf{S}$ , et  $\mathbf{C}$  peuvent alors être considérées comme étant les trois facteurs de la décomposition canonique du tenseur de données reçues.

En notant  $y_{k,n,p}$  (resp.  $v_{k,n,p}$ ) l'élément  $(k, p)$  de la matrice  $\mathbf{Y}_n$  (resp.  $\mathbf{V}_n$ ), nous obtenons :

$$y_{k,n,p} = \sum_{r=1}^M \left( \sum_{m=1}^M h_{k,m} \phi_{m,r} \right) s_{n,r} c_{p,r} + v_{k,n,p}, \quad (4.19)$$

$$= \sum_{q=1}^M g_{k,q} s_{n,q} c_{p,q} + v_{k,n,p}, \quad (4.20)$$

avec  $g_{k,r} = \sum_{m=1}^M h_{k,m} \phi_{m,r}$  donnant lieu à l'équation matricielle  $\mathbf{G} = \mathbf{H}\Phi$ . Ce modèle tensoriel est essentiellement unique si par exemple les conditions de Kruskal sont vérifiées (voir Chapitre 2). Dans ce cas les matrices  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{G}$  peuvent être obtenues à une permutation de colonnes et des facteurs d'échelle près. En supposant que le centre de fusion connaisse la matrice de codage  $\mathbf{C}$ , l'ambiguïté de permutation est alors levée. Afin d'obtenir la matrice  $\Phi$  une étape supplémentaire de décomposition bilinéaire de la matrice  $\mathbf{G}$  est nécessaire. Un estimateur à deux étapes a été proposé dans [20].

#### 4.2.2 Collaboration en réception

Dans ce qui suit nous allons considérer le cas où le centre de fusion n'est plus unique mais est remplacé par plusieurs stations ayant un nombre d'antennes plus petit. En clair, chaque station ne possède qu'un sous-tenseur du tenseur précédent. Nous supposons en particulier que chaque station ne peut vérifier localement les conditions d'identifiabilité mais que la concaténation de tous les sous-tenseurs résulte en un tenseur identifiable. Deux options se présentent alors : regrouper tous les sous-tenseurs en un seul centre de calcul ou procéder à une estimation distribuée des matrices facteurs. L'objet de ce paragraphe concerne la synthèse d'un algorithme de calcul distribué de la décomposition PARAFAC. Nous avons introduit ce concept de calcul distribué de la décomposition canonique (PARAFAC) d'un tenseur dans [52, 53].

Considérons  $L$  stations de réception connectées via un réseau représenté par un graphe connexe non-orienté  $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ . La station  $l \in \mathcal{N}$  a à sa disposition les  $x_{i,j,k}^{(l)}$ ,  $i = 1, \dots, I_l$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Ces données peuvent être ordonnées dans un tenseur  $\mathbb{X}^{(l)}$  de dimensions  $I_l \times J \times K$  admettant une décomposition canonique :

$$x_{i,j,k}^{(l)} = \sum_{r=1}^R a_{i,r}^{(l)} b_{j,r} c_{k,r}. \quad (4.21)$$

Le tenseur  $\mathbb{X}^{(l)} = [x_{i,j,k}^{(l)}]$  est complètement caractérisé par les trois matrices facteurs  $\mathbf{A}^{(l)} = [a_{i,r}^{(l)}] \in \mathbb{C}^{I_l \times R}$ ,  $\mathbf{B} = [b_{j,r}] \in \mathbb{C}^{J \times R}$ , et  $\mathbf{C} = [c_{k,r}] \in \mathbb{C}^{K \times R}$ . L'objectif de chaque station est donc d'estimer ces matrices facteurs à partir du tenseur de données  $\mathbb{X}^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ .

Nous savons, que les tranches des tenseurs peuvent s'écrire :

$$\mathbf{X}_{i..}^{(l)} = \begin{pmatrix} x_{i,1,1}^{(l)} & \cdots & x_{i,1,N}^{(l)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i,J,1}^{(l)} & \cdots & x_{i,J,N}^{(l)} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{A}_{i.}^{(l)}) \mathbf{C}^T,$$

$$\mathbf{X}_{.j.}^{(l)} = \begin{pmatrix} x_{1,j,1}^{(l)} & \cdots & x_{I_l,j,1}^{(l)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,j,K}^{(l)} & \cdots & x_{I_l,j,K}^{(l)} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \text{diag}(\mathbf{B}_{j.}) \mathbf{A}^{(l)T},$$

et

$$\mathbf{X}_{..k}^{(l)} = \begin{pmatrix} x_{1,1,k}^{(l)} & \cdots & x_{I_l,J,k}^{(l)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,1,k}^{(l)} & \cdots & x_{I_l,J,k}^{(l)} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{(l)} \text{diag}(\mathbf{C}_{k.}) \mathbf{B}^T.$$

Par suite, les matrices dépliées, résultant de la concatenation des tranches, sont données par :

$$\mathbf{X}_1^{(l)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1.}^{(l)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{.J.}^{(l)} \end{pmatrix} = (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) \mathbf{A}^{(l)T} \in \mathbb{C}^{JK \times I_l}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{X}_2^{(l)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{..1}^{(l)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{..K}^{(l)} \end{pmatrix} = (\mathbf{C} \odot \mathbf{A}^{(l)}) \mathbf{B}^T \in \mathbb{C}^{KI_l \times J}, \quad (4.23)$$

et

$$\mathbf{X}_3^{(l)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1..}^{(l)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{I_l..}^{(l)} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^{(l)} \odot \mathbf{B}) \mathbf{C}^T \in \mathbb{C}^{I_l J \times K}. \quad (4.24)$$

Si toutes les mesures  $x_{i,j,k}^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, I_l$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $k = 1, \dots, K$ , pouvaient être rassemblées en un seul point, alors on pourrait définir un tenseur global  $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ , avec  $I = \sum_{l=1}^L I_l$ , qui résulte de la concatenation des sous-tenseurs  $\mathbb{X}^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ , suivant le premier mode<sup>2</sup>, c'est-à-dire.  $\mathbb{X} = [\mathbb{X}^{(1)} \sqcup_1 \mathbb{X}^{(1)} \sqcup_1 \cdots \sqcup_1 \mathbb{X}^{(L)}]$ . Ce tenseur admet une décomposition canonique de matrices facteurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{C}$  où  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times R}$  résulte de la concaténation des matrices  $\mathbf{A}^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ ,

2. La concatenation suivant le premier mode vient du fait que les décompositions canoniques des sous-tenseurs ne diffèrent qu'en la matrice facteur du premier mode.

c'est-à-dire  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}^{(1)T}, \dots, \mathbf{A}^{(L)T}]^T$ . Notons par ailleurs que les matrices dépliées du tenseur global  $\mathbb{X}$  peuvent être construites à partir de celles des sous-tenseurs  $\mathbb{X}^{(l)}$  comme suit :

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(1)} & \dots & \mathbf{X}_1^{(L)} \end{pmatrix} = (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) \mathbf{A}^T, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^{(L)} \end{pmatrix} = (\mathbf{C} \odot \mathbf{A}) \mathbf{B}^T, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_3^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_3^{(L)} \end{pmatrix} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \mathbf{C}^T, \quad (4.27)$$

où  $\mathbf{\Pi}$  désigne une matrice de permutation.

Le problème d'estimation des matrices facteurs consiste alors à minimiser la fonction de coût

$$\mathcal{J}(\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{I_l} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left| x_{i,j,k}^{(l)} - \sum_{r=1}^R a_{i,r}^{(l)} b_{j,r} c_{k,r} \right|^2. \quad (4.28)$$

Notre objectif est de faire la synthèse d'un algorithme distribué des moindres carrés alternés (DALS). Le principe de l'algorithme des moindres carrés alternés (ALS) est de minimiser alternativement les fonctions de coût  $\mathcal{J}_1 = \|\mathbf{X}_1 - (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) \mathbf{A}^T\|_F^2$ ,  $\mathcal{J}_2 = \|\mathbf{X}_2 - (\mathbf{C} \odot \mathbf{A}) \mathbf{B}^T\|_F^2$ , and  $\mathcal{J}_3 = \|\mathbf{X}_3 - (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \mathbf{C}^T\|_F^2$ .

#### 4.2.2.1 Estimation distribuée des matrices $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$

Définissons la matrice

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} \odot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}^{(L)} \end{pmatrix},$$

avec  $\mathbf{Z}^{(l)} = \mathbf{A}^{(l)} \odot \mathbf{C}$ . De la définition de  $\mathbf{X}_2$ , nous pouvons conclure que :

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^{(L)} \end{pmatrix} = \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{Z} \mathbf{B}^T.$$

On peut aussi aisément montrer qu'il existe une matrice de permutation  $\bar{\mathbf{\Pi}}$  telle que  $\mathbf{\Pi}_1^T \mathbf{\Pi} = \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{\Pi}}$ . Par conséquent

$$\mathcal{J}_2 = \|\mathbf{X}_2 - (\mathbf{C} \odot \mathbf{A}) \mathbf{B}^T\|_F^2 = \left\| (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{\Pi}}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^{(L)} \end{pmatrix} - \mathbf{Z} \mathbf{B}^T \right\|_F^2.$$

La minimisation de  $\mathcal{J}_2$  en fonction de  $\mathbf{B}$  donne

$$\hat{\mathbf{B}}^T = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{\Pi}}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^{(L)} \end{pmatrix}.$$

Cette solution peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{B}}^T = \left( \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Z}^{(l)H} \mathbf{Z}^{(l)} \right)^{-1} \left( \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Z}^{(l)H} \bar{\mathbf{\Pi}} \mathbf{X}_2^{(l)} \right). \quad (4.29)$$

On peut noter que le calcul de (4.29) peut se faire via le moyennage des quantités locales  $\mathbf{\Lambda}_l(0) = \mathbf{Z}^{(l)H} \mathbf{Z}^{(l)}$  et  $\mathbf{\Psi}_l(0) = \mathbf{Z}^{(l)H} \bar{\mathbf{\Pi}} \mathbf{X}_2^{(l)}$ , moyennage pouvant être réalisé de manière distribuée via un algorithme de consensus de moyenne, de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_l(t) &\rightarrow \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{\Lambda}_l(0) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Z}^{(l)H} \mathbf{Z}^{(l)}, \\ \mathbf{\Psi}_l(t) &\rightarrow \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{\Psi}_l(0) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Z}^{(l)H} \bar{\mathbf{\Pi}} \mathbf{X}_2^{(l)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'estimation locale de  $\mathbf{B}^T$ , donnée par  $\hat{\mathbf{B}}^{(l)T} = \mathbf{\Lambda}_l^{-1}(t) \mathbf{\Psi}_l(t)$  converge vers  $\hat{\mathbf{B}}^T$ .

La matrice  $\mathbf{C}$  peut être estimée en minimisant la fonction de coût  $\mathcal{J}_3$ . Celle-ci peut être réécrite comme

$$\mathcal{J}_3 = \|\mathbf{X}_3 - \mathbf{Y} \mathbf{C}^T\|_F^2,$$

avec  $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$  dont la structure en bloc donne lieu à :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(L)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \odot \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{(L)} \odot \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

La minimisation de  $\mathcal{J}_3$ , étant donné  $\mathbf{Y}$ , donne alors

$$\hat{\mathbf{C}}^T = (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{X}_3,$$

dont une réécriture est :

$$\hat{\mathbf{C}}^T = \left( \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}^{(l)H} \mathbf{Y}^{(l)} \right)^{-1} \left( \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}^{(l)H} \mathbf{X}_3^{(l)} \right). \quad (4.30)$$

Comme précédemment, le calcul de (4.30) peut être obtenu en moyennant les quantités locales  $\mathbf{\Gamma}_l(0) = \mathbf{Y}^{(l)H} \mathbf{Y}^{(l)}$  et  $\mathbf{\Phi}_l(0) = \mathbf{Y}^{(l)H} \mathbf{X}_3^{(l)}$ . Un algorithme de consensus de moyenne donnerait alors :

$$\mathbf{\Gamma}_l(t) \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{\Gamma}_l(0) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}^{(l)H} \mathbf{Y}^{(l)},$$

$$\Phi_l(t) \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Phi_l(0) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}^{(l)H} \mathbf{X}_3^{(l)}.$$

L'estimation locale de  $\mathbf{C}^T$ , donnée par  $\hat{\mathbf{C}}_l^T = \mathbf{\Gamma}_l^{-1}(t) \Phi_l(t)$ ,  $l = 1, \dots, L$ , converge alors vers  $\hat{\mathbf{C}}^T$ .

#### 4.2.2.2 Estimation locale de $\mathbf{A}^{(l)}$

Sachant que la matrice  $\mathbf{A}^{(l)}$  ne contient que des paramètres purement locaux, il n'est pas nécessaire de recourir à une estimation en réseau. De la définition de la matrice dépliée  $\mathbf{X}_1$  et tenant compte des propriétés de la norme de Frobenius, nous obtenons :

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{l=1}^L \left\| \mathbf{X}_1^{(l)} - (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) \mathbf{A}^{(l)T} \right\|_F^2.$$

Par conséquent :

$$\hat{\mathbf{A}}^{(l)T} = (\hat{\mathbf{B}} \odot \hat{\mathbf{C}})^\dagger \mathbf{X}_1^{(l)}. \quad (4.31)$$

Il est à noter que l'identifiabilité du tenseur global garantit que  $\mathbf{B} \odot \mathbf{C}$  soit de rang colonne plein.

Nous illustrons les performances de l'algorithme proposé dans l'exemple suivant. Il est à noter que l'algorithme ALS distribué basé sur le consensus de moyenne nécessite plusieurs itérations à chaque étape de consensus. En utilisant le protocole de consensus de moyenne en temps fini, tel que développé dans le chapitre précédent, on a un meilleur contrôle du coût de la coopération entre nœuds. On rappelle que dans le cas des graphes fortement réguliers, deux itérations de consensus suffisent. Il est intéressant de pouvoir analyser cet algorithme dans le cas où une seule itération de consensus est requise. L'analyse théorique de la convergence de cet algorithme est une tâche plutôt difficile. Les premières observations que nous avons faites, basées sur des simulations, montrent évidemment que les performances dépendent du graphe mais aussi du conditionnement des matrices facteurs.

### 4.3 Traitement distribué des tenseurs de grandes dimensions

Face au déluge de données auquel nous faisons dorénavant face, il nous a semblé intéressant de nous attaquer à la problématique de l'analyse des tenseurs de grandes dimensions. Contrairement au cas matriciel, très peu de travaux ont été consacrés à cette thématique. Pour les quelques travaux existants, deux approches ont été considérées : la première consiste à exploiter la parcimonie des tenseurs de grandes dimensions. Dans [46], l'algorithme GigaTensor est proposé afin de minimiser le nombre d'opérations en virgule flottante et d'éviter le problème d'explosion de données. Ce problème survient lorsque le produit de Khatri-Rao est implémenté de façon naïve. L'idée majeure dans [46] consiste en un ordonnancement intelligent des différentes opérations tout en évitant le calcul explicite du produit de Khatri-Rao.

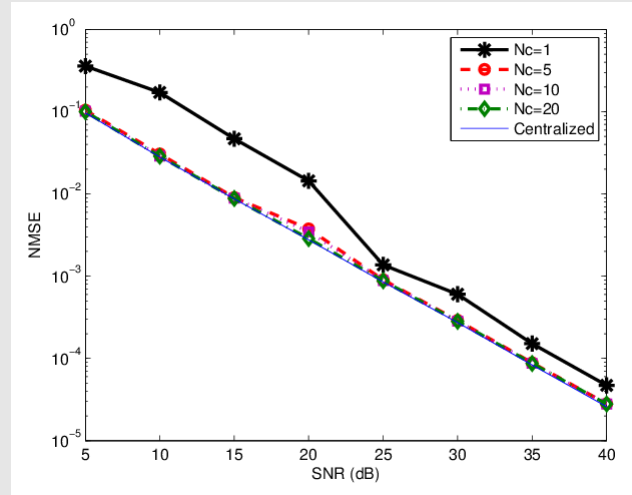


En utilisant les plateformes *MapReduce* et *Hadoop*, une implémentation dans un environnement de calcul distribué est proposé par les auteurs. Il est à noter que le problème d'explosion de données peut aussi être traité en exploitant la parcimonie des données et/ou des matrices facteurs via les méthodes issues du *Compressive sensing* [6, 88].

**Exemple 8** *Considérons un réseau de  $L = 9$  stations formant un réseau modélisé par un graphe de Payley [33]. Chaque station dispose de données  $x_{i,j,k}^{(l)} = \sum_{r=1}^R a_{i,r}^{(l)} b_{j,r} c_{k,r}$ , avec  $R = 4$ ,  $i = 1$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , et  $k = 1, \dots, 10$ , signifiant que chaque sous-tenseur est simplement une matrice (voir la description complète du scénario dans [52]). Les performances sont évaluées en termes de*

$$NMSE = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\left\| \tilde{\mathbf{X}}_3^{(l)} - \left( \hat{\mathbf{A}}^{(l)} \odot \hat{\mathbf{B}} \right) \hat{\mathbf{C}}^T \right\|_F^2}{\left\| \mathbf{X}_3^{(l)} \right\|_F^2}$$

Ici  $\tilde{\mathbf{X}}_3^{(l)}$  est une version bruitée de  $\mathbf{X}_3^{(l)}$ . Les résultats ci-après sont des valeurs médianes de 100 expériences indépendantes de Monte-Carlo. Les itérations de DALS sont arrêtées après 100 itérations. Pour différentes valeurs de rapport signal sur bruit, la figure ci-dessous décrit le NMSE en régime établi. On peut noter que l'algorithme distribué émule bien l'algorithme centralisé bien que le nombre d'itérations de consensus soit réduit (nous utilisons un algorithme à convergence asymptotique).



$N_c$  désigne le nombre d'itérations de consensus.

La seconde approche consiste à subdiviser le tenseur de grande dimension en plusieurs tenseurs de plus faible dimension. Les matrices facteurs sont ensuite reconstruites à partir des décompositions des sous-tenseurs. Dans [78], un sous-échantillonnage aléatoire du tenseur est proposé. En clair, le découpage du tenseur est réalisé de façon aléatoire ; puis les nombreux sous-tenseurs obtenus sont décomposés en parallèle. Les résultats obtenus sont ensuite combinés de sorte à reconstruire les matrices facteurs du tenseur de grandes dimensions. Evidemment la combinaison des sous-tenseurs n'est fructueuse que si les sous-tenseurs vérifient les conditions d'identifiabilité. Dans [81], la subdivision est réalisée de façon déterministe ; une décomposition en grille est proposée. Chaque sous-tenseur est affecté à une machine. Cependant le processus de calcul est orchestré par un serveur central qui récolte les calculs intermédiaires et les diffuse aux nœuds de calcul ; la collaboration entre les nœuds de calcul est donc indirecte donnant lieu à un processus de calcul décentralisé, et non pas distribué. Notre contribution a été de proposer un calcul complètement distribué préservant les propriétés d'unicité de la décomposition. Ici, il n'est pas requis que les sous-tenseurs vérifient les conditions d'identifiabilité.

#### 4.3.1 Formulation du problème et solution proposée

Considérons un tenseur de grande dimension  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ , c'est-à-dire un tenseur dont le nombre d'éléments  $IKJ$  est de l'ordre de centaines voire de milliers ou de millions. Sa décomposition canonique est donnée par  $\mathcal{X} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket$  :

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r, \quad (4.32)$$

$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_R] \in \mathbb{C}^{I \times R}$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_R] \in \mathbb{C}^{J \times R}$ , et  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_R] \in \mathbb{C}^{K \times R}$  étant les matrices facteurs de la décomposition. Nous supposons que la condition d'unicité essentielle [60] est vérifiée. Les matrices facteurs sont en général obtenues en calculant la meilleure approximation de rang  $R$  du tenseur :

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}} \left\| \mathcal{X} - \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r \right\|_F^2. \quad (4.33)$$

Considérons, un serveur central disposant d'un tenseur  $\mathcal{X}$ , de grande dimension, à factoriser. Ce serveur est connecté à un réseau de  $L$  machines de puissance de calcul limitée. L'idée est de réaliser la décomposition canonique de  $\mathcal{X}$  en utilisant les ressources disponibles du réseau tout en rendant le serveur central disponible pour la réalisation d'autres tâches. Le serveur central et les nœuds de calcul constituent un réseau dont les échanges de données sont supposés être parfaits. Contrairement à [81], la coopération entre les nœuds de calcul est directe, donnant ainsi lieu à un processus de calcul distribué.

Le serveur central génère des sous-tenseurs  $\mathcal{X}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \in \mathbb{C}^{I_{\ell_1} \times J_{\ell_2} \times K_{\ell_3}}$ ,  $\ell_1 = 1, \dots, L_1$ ,  $\ell_2 = 1, \dots, L_2$ ,  $\ell_3 = 1, \dots, L_3$ , de dimensions beaucoup plus petites, en partitionnant  $\mathcal{X}$  en une grille tri-dimensionnelle. Les dimensions des sous-tenseurs sont :  $I_1 + \dots +$

$I_{L_1} \geq I, J_1 + \dots + J_{L_2} \geq J, K_1 + \dots + K_{L_3} \geq K$ . Les sous-tenseurs  $\mathcal{X}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)}$  peuvent être concaténés suivant différentes paires de modes pour former des mode-1, mode-2, et mode-3 sous-tenseurs  $\mathcal{X}_1^{(\ell_1)} \in \mathbb{C}^{I_{\ell_1} \times J \times K}, \mathcal{X}_2^{(\ell_2)} \in \mathbb{C}^{I \times J_{\ell_2} \times K}, \mathcal{X}_3^{(\ell_3)} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K_{\ell_3}}$ , qui sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1^{(\ell_1)} &= [\mathcal{X}_1^{(\ell_1, 1)} \sqcup_3 \dots \sqcup_3 \mathcal{X}_1^{(\ell_1, L_3)}], & \mathcal{X}_1^{(\ell_1, \ell_3)} &= [\mathcal{X}^{(\ell_1, 1, \ell_3)} \sqcup_2 \dots \sqcup_2 \mathcal{X}^{(\ell_1, L_2, \ell_3)}], \\ \mathcal{X}_2^{(\ell_2)} &= [\mathcal{X}_2^{(\ell_2, 1)} \sqcup_1 \dots \sqcup_1 \mathcal{X}_2^{(\ell_2, L_1)}], & \mathcal{X}_2^{(\ell_2, \ell_1)} &= [\mathcal{X}^{(\ell_1, \ell_2, 1)} \sqcup_3 \dots \sqcup_3 \mathcal{X}^{(\ell_1, \ell_2, L_3)}], \\ \mathcal{X}_3^{(\ell_3)} &= [\mathcal{X}_3^{(\ell_3, 1)} \sqcup_2 \dots \sqcup_2 \mathcal{X}_3^{(\ell_3, L_2)}], & \mathcal{X}_3^{(\ell_3, \ell_2)} &= [\mathcal{X}^{(1, \ell_2, \ell_3)} \sqcup_1 \dots \sqcup_1 \mathcal{X}^{(L_1, \ell_2, \ell_3)}]. \end{aligned}$$

Un aspect intéressant résultant de la tri-linéarité de la décomposition canonique est que chaque sous-tenseur de mode- $i, i = 1, 2, 3$ , admet exactement une décomposition canonique donnée par :

$$\mathcal{X}_1^{(\ell_1)} = \llbracket \mathbf{A}^{(\ell_1)}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket, \quad \mathcal{X}_2^{(\ell_2)} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}^{(\ell_2)}, \mathbf{C} \rrbracket, \quad \mathcal{X}_3^{(\ell_3)} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}^{(\ell_3)} \rrbracket. \quad (4.34)$$

A présent, le serveur central assigne à chacune des  $L$  machines disponibles un sous-tenseur  $\mathcal{X}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)}$ . A chaque machine est associée un identifiant  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$  et le sous-tenseur correspondant  $\mathcal{X}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)}$ . Par conséquent,  $L = L_1 L_2 L_3$ . Suivant (4.34), les machines ayant la même  $i$ -ème coordonnée,  $i = 1, 2, 3$ , peuvent collaborer afin d'estimer la matrice facteur qu'elles ont en commun dans le mode- $i$ . La relation d'adjacence entre les machines évolue donc suivant le mode d'intérêt. Nous pouvons de ce fait utiliser le concept des graphes multiples, ou graphes multicouches, pour représenter le réseau [96, 21].

Soit  $\mathbb{G}$  le graphe multicouche constitué de 3 graphes simples  $\mathbb{G}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ , supposés être non-orientés et ayant le même ensemble de sommets  $V$ , de cardinal  $L$ , mais ayant des ensembles d'arêtes spécifiques  $E^{(i)}$ . Chaque graphe simple est associé à un mode du tenseur à décomposer et est composé de  $L_i$  composantes connexes de  $L/L_i$  sommets, chaque composante connexe étant un graphe étoile<sup>3</sup>. Plus précisément, les sommets d'identifiants  $(l_1, l_2, l_3)$  et  $(l'_1, l'_2, l'_3)$  appartiennent à la même composante de  $\mathbb{G}^{(i)}$  si et seulement si  $l_i = l'_i$ . Ils sont adjacents seulement si ils ne sont pas tous les deux des feuilles. Par suite, chaque couche peut être vue comme un ensemble de sous-réseaux en étoile travaillant en parallèle. Comme c'est le cas dans l'analyse des tenseurs, les couches du graphe multicouche sont à considérer de manière alternée. En exploitant les degrés de liberté apportés par les trois couches  $\mathbb{G}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ , du graphe multicouche  $\mathbb{G}$ , le problème consiste alors à trouver  $\mathbf{A}^{(\ell_1)}, \ell_1 = 1, \dots, L_1, \mathbf{B}^{(\ell_2)}, \ell_2 = 1, \dots, L_2$ , et  $\mathbf{C}^{(\ell_3)}, \ell_3 = 1, \dots, L_3$  en résolvant les problèmes de moindres carrés suivants :

$$\min_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}} \left\| \mathcal{X}_1^{(\ell_1)} - \llbracket \mathbf{A}^{(\ell_1)}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rrbracket \right\|_F^2, \quad \ell_1 = 1, \dots, L_1, \quad (4.35)$$

$$\min_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}} \left\| \mathcal{X}_2^{(\ell_2)} - \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}^{(\ell_2)}, \mathbf{C} \rrbracket \right\|_F^2, \quad \ell_2 = 1, \dots, L_2, \quad (4.36)$$

$$\min_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}} \left\| \mathcal{X}_3^{(\ell_3)} - \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}^{(\ell_3)} \rrbracket \right\|_F^2, \quad \ell_3 = 1, \dots, L_3. \quad (4.37)$$

3. Suivant les ressources disponibles, tout autre graphe peut être choisi. Les graphes impairs, déjà suggérés pour le calcul parallèle, peuvent, ici, être très efficaces, surtout si le consensus en temps fini est utilisé.

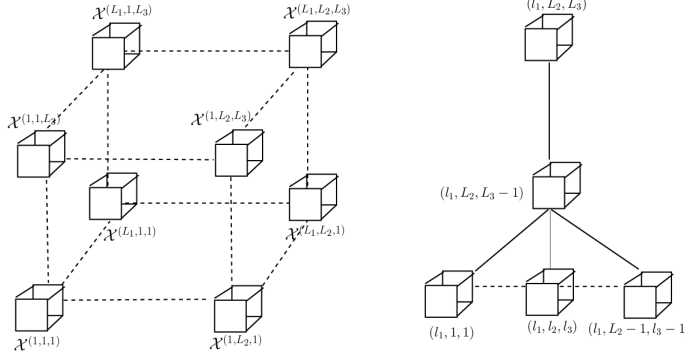


FIGURE 4.3 – A gauche : Subdivision d'un tenseur en plus petits sous-tenseurs  $\mathcal{X}^{(l_1, l_2, l_3)}$  chacun étant associé à une machine d'identifiant  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ . A droite :  $\ell_1$ -ème topologie en étoile du sous-réseau associé au mode-1 du tenseur.

Ces problèmes peuvent être résolus en parallèle puisqu'ils sont associés à des ensembles disjoints de machines. Par ailleurs, les problèmes étant de dimensions faibles, ils peuvent être plus facilement résolus sur des machines de faible capacité de calcul. Soient  $\mathbf{X}_{(1)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \in \mathbb{C}^{J_{\ell_2} K_{\ell_3} \times I_{\ell_1}}$ ,  $\mathbf{X}_{(2)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \in \mathbb{C}^{K_{\ell_3} I_{\ell_1} \times J_{\ell_2}}$ , et  $\mathbf{X}_{(3)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \in \mathbb{C}^{I_{\ell_1} J_{\ell_2} \times K_{\ell_3}}$  les matrices obtenues en dépliant les sous-tenseurs  $\mathcal{X}_1^{(\ell_1)}$ ,  $\mathcal{X}_2^{(\ell_2)}$  et  $\mathcal{X}_3^{(\ell_3)}$  selon les mode-1, mode-2 et mode-3, respectivement. Nous pouvons récrire les problèmes d'optimisation (4.35)-(4.37) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}} &= \min_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}} \sum_{\ell_2=1}^{L_2} \sum_{\ell_3=1}^{L_3} \underbrace{\left\| \mathbf{X}_{(1)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} - (\mathbf{B}^{(\ell_2)} \odot \mathbf{C}^{(\ell_3)}) \mathbf{A}^{(\ell_1)T} \right\|_F^2}_{\mathbb{J}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}}^{(\ell_2, \ell_3)}}, \\ \mathbb{J}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}} &= \min_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}} \sum_{\ell_1=1}^{L_1} \sum_{\ell_3=1}^{L_3} \underbrace{\left\| \mathbf{X}_{(2)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} - (\mathbf{C}^{(\ell_3)} \odot \mathbf{A}^{(\ell_1)}) \mathbf{B}^{(\ell_2)T} \right\|_F^2}_{\mathbb{J}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}}^{(\ell_1, \ell_3)}}, \\ \mathbb{J}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}} &= \min_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}} \sum_{\ell_1=1}^{L_1} \sum_{\ell_2=1}^{L_2} \underbrace{\left\| \mathbf{X}_{(3)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} - (\mathbf{A}^{(\ell_1)} \odot \mathbf{B}^{(\ell_2)}) \mathbf{C}^{(\ell_3)T} \right\|_F^2}_{\mathbb{J}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}^{(\ell_1, \ell_2)}}. \end{aligned}$$

La solution qui minimise  $\mathbb{J}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}}$  (resp.  $\mathbb{J}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}}$  et  $\mathbb{J}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}$ ) peut alors être écrite comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(\ell_1)T} &= \left( \frac{1}{L_2 L_3} \sum_{\ell_2, \ell_3} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}}^{(\ell_2, \ell_3)} \right)^{-1} \left( \frac{1}{L_2 L_3} \sum_{\ell_2, \ell_3} \mathbf{\Psi}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}}^{(\ell_2, \ell_3)} \right) \\ &= (\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}})^{-1} \bar{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(\ell_2)T} &= \left( \frac{1}{L_1 L_3} \sum_{\ell_1, \ell_3} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}}^{(\ell_1, \ell_3)} \right)^{-1} \left( \frac{1}{L_1 L_3} \sum_{\ell_1, \ell_3} \mathbf{\Psi}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}}^{(\ell_1, \ell_3)} \right) \\ &= (\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}})^{-1} \bar{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{(\ell_3)T} &= \left( \frac{1}{L_1 L_2} \sum_{\ell_1, \ell_2} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}^{(\ell_1, \ell_2)} \right)^{-1} \left( \frac{1}{L_1 L_2} \sum_{\ell_1, \ell_2} \mathbf{\Psi}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}^{(\ell_1, \ell_2)} \right) \\
&= (\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}})^{-1} \bar{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

où  $\bar{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}}^{(\ell_2, \ell_3)} = (\mathbf{B}^{(\ell_2)} \odot \mathbf{C}^{(\ell_3)})^H \mathbf{X}_{(1)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \in \mathbb{C}^{R \times I_{\ell_1}}$ ,  $\bar{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}}^{(\ell_1, \ell_3)} = (\mathbf{C}^{(\ell_3)} \odot \mathbf{A}^{(\ell_1)})^H \mathbf{X}_{(2)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \in \mathbb{C}^{R \times J_{\ell_2}}$ ,  $\bar{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}^{(\ell_1, \ell_2)} = (\mathbf{A}^{(\ell_1)} \odot \mathbf{B}^{(\ell_2)})^H \mathbf{X}_{(3)}^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \in \mathbb{C}^{R \times K_{\ell_3}}$ ,  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}}^{(\ell_2, \ell_3)} = \mathbf{B}^{(\ell_2)H} \mathbf{B}^{(\ell_2)} * \mathbf{C}^{(\ell_3)H} \mathbf{C}^{(\ell_3)} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ ,  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}}^{(\ell_1, \ell_3)} = \mathbf{C}^{(\ell_3)H} \mathbf{C}^{(\ell_3)H} * \mathbf{A}^{(\ell_1)H} \mathbf{A}^{(\ell_1)} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ , et  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}^{(\ell_1, \ell_2)} = \mathbf{A}^{(\ell_1)H} \mathbf{A}^{(\ell_1)H} * \mathbf{B}^{(\ell_2)H} \mathbf{B}^{(\ell_2)} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ .

L'estimation de  $\{\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(L_1)}\}$ ,  $\{\mathbf{B}^{(1)}, \dots, \mathbf{B}^{(L_2)}\}$ , et  $\{\mathbf{C}^{(1)}, \dots, \mathbf{C}^{(L_3)}\}$  est réalisée en trois étapes. Tout d'abord, les  $L_1$  composantes connexes de  $\mathbb{G}^{(1)}$  travaillent en parallèle pour estimer respectivement  $\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(L_1)}$ . Ensuite, les  $L_2$  composantes connexes de  $\mathbb{G}^{(2)}$  estiment  $\mathbf{B}^{(1)}, \dots, \mathbf{B}^{(L_2)}$ . Enfin, les  $L_3$  composantes connexes de  $\mathbb{G}^{(3)}$  estiment  $\mathbf{C}^{(1)}, \dots, \mathbf{C}^{(L_3)}$ . Grâce à la topologie en étoile, les calculs de moyennes dans (4.38), (4.39), et (4.40) peuvent se faire en deux itérations.<sup>4</sup>

**Identifiabilité** : Un calcul strictement local du sous-tenseur affecté au nœud  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$  implique de vérifier la condition nécessaire d'unicité suivante [64] :

$$\min(J_{\ell_2} K_{\ell_3}, I_{\ell_1} K_{\ell_3}, I_{\ell_1} J_{\ell_2}) \geq R. \tag{4.41}$$

Cette condition pourrait être violée dans le cas où les sous-tenseurs ont des dimensions très petites comparées au nombre de facteurs latents  $R$  du tenseur. Cependant, l'aspect collaboratif permet de relaxer cette condition de sorte qu'on ne requiert que

$$\min\left(\sum_{\ell_2, \ell_3} J_{\ell_2} K_{\ell_3}, \sum_{\ell_1, \ell_3} I_{\ell_1} K_{\ell_3}, \sum_{\ell_1, \ell_2} I_{\ell_1} J_{\ell_2}\right) \geq R, \tag{4.42}$$

Par ailleurs, par la nature du schéma de collaboration proposé, on retrouve les mêmes ambiguïtés de permutation et de facteur d'échelle inhérentes à la décomposition canonique d'un tenseur.

**Complexité de calcul et de communication** : Le coût de calcul global est similaire à celui qu'on aurait si le tenseur de grandes dimensions était décomposé par un seul nœud via l'algorithme des moindres carrés alternés. Cependant, le coût par machine est de manière significative plus faible. Par exemple, pour un tenseur cubique ( $I = J = K$ ,  $I > 10^2$ ) échantillonné de façon uniforme de sorte que  $I_l = J_l = K_l = mI$ , avec  $m < 1$ , les coûts de calcul et de communication sont donnés par le tableau 4.2 suivant :

Soit  $q$  le ratio entre la puissance requise pour réaliser une opération en virgule flottante et celle nécessaire pour la transmission d'un nombre réel. Supposons que

4. Pour des topologies arbitraires, un calcul exact des moyennes peut être obtenu en utilisant les algorithmes de consensus de moyenne en temps fini développés dans le chapitre précédent. En utilisant des topologies de type graphes fortement réguliers deux itérations suffisent.

TABLE 4.2 – Evaluation de la complexité de calcul et de communication par nœud de calcul et par itération pour un tenseur de dimension  $I \times I \times I$  et de rang  $R$ .

Méthode	Coût de calcul	Côut de communication
Centralized	$6RI^3$	-
Distributed	$6mRI^3$	$3R^2 + 3mRI$

$q \ll I^2$ , le ratio sur la consommation d'énergie dans un contexte distribué (pour une machine)  $E_d$  et dans un contexte centralisé  $E_c$  est donné par  $\frac{E_d}{E_c} \approx (1 + \frac{q}{2I^2})m \approx m < 1$ . La réduction de la consommation suit donc la réduction des dimensions du tenseur.

Par ailleurs, du tableau 4.2, on peut noter que coût additionnel de consommation est principalement dû aux communications. En effet, à chaque itération de l'algorithme, chaque machine  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$  transmet trois matrices de dimensions  $R \times R$  ( $\bar{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}}, \bar{\Gamma}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}}, \bar{\Gamma}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}}$ ) et trois matrices rectangulaires ( $\bar{\Psi}_{\mathbf{A}^{(\ell_1)}} \in \mathbb{C}^{R \times I_{\ell_1}}, \bar{\Psi}_{\mathbf{B}^{(\ell_2)}} \in \mathbb{C}^{R \times J_{\ell_2}}, \bar{\Psi}_{\mathbf{C}^{(\ell_3)}} \in \mathbb{C}^{R \times K_{\ell_3}}$ ). Le coût global de communications par itération s'évalue donc à :

$$\mathcal{C} = 3R^2L + R \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} (I_{\ell_1} + J_{\ell_2} + K_{\ell_3}).$$

Le coût de communication augmente de façon linéaire avec le nombre de machines. La solution proposée vérifie donc la propriété de passage à l'échelle. Par ailleurs, en choisissant de façon adaptée les dimensions des sous-tenseurs, on peut encore gagner en coût de communication par machine.

Pour ce faire, supposons que  $L$  machines sont disponibles. On désire minimiser le coût de communication par machine tout en garantissant la condition nécessaire d'identifiabilité. Les dimensions des sous-tenseurs et les paramètres  $L_i$  peuvent alors être obtenus en résolvant la programmation linéaire en nombres entiers suivante :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} (I_{\ell_1} + J_{\ell_2} + K_{\ell_3}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\ell_1} I_{\ell_1} \geq I, \quad \sum_{\ell_2} J_{\ell_2} \geq J, \quad \sum_{\ell_3} K_{\ell_3} \geq K, \quad L_1 L_2 L_3 \leq L \\ & \sum_{\ell_2, \ell_3} J_{\ell_2} K_{\ell_3} \geq R, \quad \sum_{\ell_1, \ell_3} I_{\ell_1} K_{\ell_3} \geq R, \quad \sum_{\ell_1, \ell_2} I_{\ell_1} J_{\ell_2} \geq R. \end{aligned}$$

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résumé nos différentes contributions liées au traitement de données et à l'analyse des systèmes en réseau via des structures nonlinéaires et multilinéaires. D'une façon synthétique les principales contributions sont les suivantes :

- Traitement distribué des données tensorielles et analyse de tenseurs de grandes dimensions : Nous avons principalement initié le concept de calcul distribué des décompositions tensorielles. Les algorithmes proposés qu'ils soient de

type moindres carrés alternés, comme reporté dans ce manuscrit, ou de type Levenberg-Marquardt sont basés sur le concept du consensus de moyenne. Nos études sur le consensus (chapitre 3) permettent de proposer des architectures de calcul qui limitent la complexité de communication lorsque différentes machines collaborent pour le traitement des données tensorielles.

- Systèmes non-linéaires en blocs et analyse tensorielle : cette thématique rapprochant deux volets *a priori* distants est plutôt originale. Nous avons ainsi pu mettre en évidence une caractérisation tensorielle unique des noyaux de Volterra associés aux systèmes nonlinéaires structurés en blocs. L'analyse du rang d'un tenseur construit à partir du noyau de Volterra permet d'inférer la structure en bloc interne de ce type de systèmes nonlinéaires.

Ces résultats ont été obtenus grâce à la collaboration avec :

- Enseignants-Chercheurs : G. Favier (I3S, Sophia Antipolis), A.L.F. de Almeida (UFC, Fortaleza, Brésil)

Ils ont donné lieu aux cinq principales publications suivantes

- A.L.F. de ALMEIDA and A.Y. KIBANGO "Distributed Large-Scale Tensor Decomposition". Proc. 39th Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Process. (ICASSP), Florence, Italy, May 2014.
- A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Tensor analysis based model structure determination and parameter estimation for block-oriented nonlinear systems", IEEE Journal on Selected Topics on Signal Processing, Vol. 4, No 3, pp. 514-525, 2010.
- A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Identification of Parallel-Cascade Wiener Systems using joint diagonalization of third-order Volterra kernel slices", IEEE Signal Processing letters, Vol. 16, No 3, pp. 188-191, 2009.
- A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Blind Equalization of Nonlinear Channels using Tensor decompositions with code/space/time diversities", Signal Processing 89 (2009), pp. 133-143.
- A.Y. KIBANGO and G. FAVIER, "Wiener-Hammerstein Systems Modeling using Diagonal Volterra Kernels Coefficients", IEEE Signal Processing Letters, Vol. 13, No 6, pp. 381-384, 2006.





# Mobilité intelligente

---

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Navigation</b>	<b>70</b>
5.1.1	Estimation de la position d'un véhicule en milieu urbain	70
5.1.2	Estimation de l'attitude en vue de la navigation pédestre	77
<b>5.2</b>	<b>Estimation et prédiction de l'état du trafic automobile</b>	<b>80</b>
5.2.1	Estimation de l'état du trafic	81
5.2.2	Prédiction de l'état du trafic	83
<b>5.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>85</b>

---

Dans ce chapitre, dédié aux applications, la thématique principale est celle de la mobilité ou plutôt de la mobilité intelligente pour sacrifier à l'usage terminologique actuel. Cees Nooteboom disait "*Quand on ne sait pas où on va, la vitesse du déplacement ne compte plus*", une façon défférente et moderne de reprendre la célèbre maxime de Jean de la Fontaine "*Rien ne sert de courir, il faut partir à point*". Savoir où aller, trouver son chemin, partir au bon moment,... Ces questions qui jalonnent notre quotidien sont au coeur de la question de la mobilité, un enjeu sociétal majeur. Ainsi, la société, via les organismes de financement de la recherche, se tourne vers ses dignes fils chercheurs pour trouver des solutions "intelligentes" pour mieux se localiser, trouver le chemin optimal, l'instant de départ le plus adéquat, ce quel que soit le mode de transport adopté ou en combinant différentes modalités. L'enjeu est d'une importance capitale car une mobilité non maîtrisée impacte aussi bien la vie des familles, l'économie, et l'environnement. Selon le rapport 2013 de la société INRIX, les conducteurs en France ont perdu en moyenne 35 heures par an dans le trafic [12]; soit une semaine de travail par an perdue dans les bouchons!

Les récentes avancées technologiques nous permettent d'envisager une mobilité plus intelligente. Quel est le meilleur moment pour quitter mon lieu de travail ou le rejoindre? Où se trouve le bus que j'attends? Quand sera t-il à l'arrêt de bus et combien de temps mettrai-je pour arriver à ma destination? Dans un environnement clos, comment puis je retrouver mon chemin? D'une façon générale, ce sont ces questions qui ont suscité les travaux que je vais résumer ci-après.

## 5.1 Navigation

### 5.1.1 Estimation de la position d'un véhicule en milieu urbain

Dans bon nombre de systèmes d'aide à l'exploitation et information des voyageurs la localisation des bus est effectuée à l'aide de capteurs absolus (récepteurs GPS embarqués, détecteurs d'ouverture de portes, balises émettrices ou réceptrices au sol) et de capteurs relatifs (odomètres et exceptionnellement des gyroscopes ou des accéléromètres). La stratégie de localisation consiste à calculer la position du véhicule à l'aide des capteurs absolus, lorsque la précision est suffisante, et à utiliser temporairement les capteurs relatifs lorsque les capteurs absolus sont en défaut. En environnement urbain, l'utilisation d'un récepteur GPS s'expose principalement à deux problèmes :

- le masquage : le nombre de signaux de satellites reçus est insuffisant pour déterminer la position du récepteur. Dans ce cas, la plupart des systèmes actuels se contentent de commuter entre mode de navigation GPS et prédiction basée sur les capteurs locaux de mouvement du véhicule.
- les multi-trajets : les signaux sont réfléchis par des obstacles comme les parois des immeubles, les arbres, les vitres, ce qui conduit à la fourniture d'une valeur biaisée de la mesure des pseudo-distances.

Afin de pallier les défauts de précision, d'intégrité et de disponibilité liés à l'utilisation du GPS, l'ESA (*European Space Agency*) et la Commission Européenne ont lancé en 1996, sous l'impulsion du CNES (*Centre National d'Etudes Spatiales*) et du STNA (*Service Technique de la Navigation Aérienne*), le système EGNOS (*European Geostationary Navigation Overlay System*) qui a pour objectif d'améliorer les performances actuelles du GPS et surtout de contrôler son intégrité.

Le projet EGNOS-BUS, cadre de mes travaux, avait deux objectifs principaux : développer un indicateur de qualité de service et un nouveau système de localisation GPS EGNOS plus performant que le GPS ou DGPS seul, dans le cadre d'une application de gestion de flotte de bus. Précisément, il était question de fournir, d'une part, un estimateur de position meilleur que le récepteur GPS et, d'autre part, des indicateurs d'intégrité, ceci en prenant en compte les perturbations que sont les multi-trajets et le masquage et des données relatives au mouvement (essentiellement l'odométrie). En effet, même en présence de ces perturbations, la mesure des pseudo-distances renferme de l'information sur la position du récepteur. Il est proposé ici de réaliser une hybridation globale des capteurs, c'est à dire de continuer d'exploiter l'information dégradée des mesures de pseudo-distances conjointement à l'exploitation des capteurs locaux pour estimer globalement la position.

#### 5.1.1.1 Modélisation

Considérons un véhiculé localisé à chaque instant,  $k$ , par ses coordonnées  $(x_k, y_k, z_k)$  dans un repère ENU (*East-North-Up*). Un modèle cinématique décrivant le mouve-

ment d'un véhicule dans le plan horizontal est donné par :

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + \cos(\theta_{k-1})v_{k-1}\Delta T \\ y_k &= y_{k-1} + \sin(\theta_{k-1})v_{k-1}\Delta T \end{aligned}$$

où,  $\theta_k$  et  $v_k$  désignent respectivement le cap et la vitesse du véhicule,  $\Delta T$  étant la période d'échantillonnage. Il est à noter que le mouvement sur le plan horizontal obéit aux consignes en vitesse et en cap données par le conducteur. Par contre, sur le plan vertical, le véhicule subit les variations d'altitude inhérentes au terrain traversé. Ces variations sont des pentes qui peuvent être considérées comme aléatoires. Par conséquent, la composante verticale  $z_k$  peut être représentée par un mouvement brownien :

$$z_k = z_{k-1} + \varepsilon_k^z,$$

où  $\varepsilon_k^z$  est un bruit considéré comme étant blanc et gaussien, son écart-type quantifiant les variations d'altitude.

Dans le système GPS, on sait que la pseudo-distance mesurée par le récepteur dépend de la position du satellite émetteur et de celle du véhicule. Celles-ci sont en général exprimées dans le repère ECEF (Earth Centred Earth Fixed). Il s'agit donc de convertir les coordonnées ENU ( $x_k, y_k, z_k$ ) en coordonnées ECEF ( $X_k, Y_k, Z_k$ ). Pour ce faire, il est nécessaire de recourir à un point de référence local, celui-ci pouvant être la station de départ du bus. Soient donc ( $X_r, Y_r, Z_r$ ) les coordonnées ECEF de ce point de référence. Par suite, le mouvement du véhicule dans le repère ECEF est décrit par :

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{k-1} \\ Y_{k-1} \\ Z_{k-1} \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{k-1})v_{k-1}\Delta T \\ \sin(\theta_{k-1})v_{k-1}\Delta T \\ \varepsilon_k^z \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) & -\sin(\phi)\cos(\lambda) & \cos(\phi)\cos(\lambda) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\phi)\sin(\lambda) & \cos(\phi)\sin(\lambda) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\phi = \arctan \frac{Z_r}{\sqrt{X_r^2 + Y_r^2}}, \lambda = \arctan \frac{Y_r}{X_r}. \quad (5.3)$$

Les variations de la vitesse et du cap sont, quant à elles, respectivement représentées par un mouvement brownien et par des processus à sauts. En effet, on peut considérer, qu'en milieu urbain, le véhicule suit une trajectoire faite de lignes droites. Son cap peut donc être considéré comme étant quasi constant par portion de trajectoire. En conséquence, nous avons :

$$v_k = v_{k-1} + \varepsilon_k^v, \quad (5.4)$$

où  $\varepsilon_k^v$  est un bruit blanc gaussien ;

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \varepsilon_k^\theta + a_k^\theta \Delta N_k^\theta \quad (5.5)$$

où  $\varepsilon_k^\theta$  est un bruit blanc gaussien de faible écart-type,  $\Delta N_k^\theta$  est un accroissement poissonien de fréquence  $\beta$  correspondant à la fréquence de changement de cap et où  $a_k^\theta$  est un bruit blanc uniforme sur l'intervalle  $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$  représentant un nouveau cap.

Le mouvement du véhicule est observé à travers deux capteurs : un odomètre et un récepteur GPS. Le récepteur GPS peut être configuré pour recevoir à la même fréquence les impulsions de l'odomètre et les pseudo-distances. Pour la période de mesure  $\Delta T$ , le nombre d'impulsions de l'odomètre, noté  $n_k$ , est lié à la vitesse du véhicule par la relation :

$$n_k = \frac{\Delta T}{g_k} v_k + \varepsilon_k^n \quad (5.6)$$

où  $g_k$  est le coefficient odométrique, exprimé en m/pulses, et  $\varepsilon_k^n$  un bruit blanc gaussien représentant l'incertitude sur la mesure délivrée par l'odomètre. Le coefficient odométrique est une caractéristique du véhicule. Cependant, les conditions d'exploitation de ce dernier peuvent faire que  $g_k$  soit variable. On peut donc modéliser cette variation par un simple mouvement brownien :

$$g_k = g_{k-1} + \varepsilon_k^g. \quad (5.7)$$

Comme indiqué ci-dessus, le récepteur GPS délivre aussi les mesures de pseudo-distances qui, une fois corrigées des effets ionosphériques, troposphériques et du biais d'horloge satellite, s'écrivent, pour le satellite numéroté  $i$  :

$$\rho_k^i = \sqrt{(X_k^i - X_k)^2 + (Y_k^i - Y_k)^2 + (Z_k^i - Z_k)^2} + ch_k + e_k^i, \quad (5.8)$$

où  $(X_k^i, Y_k^i, Z_k^i)$  sont les coordonnées ECEF du satellite, éventuellement corrigée par EGNOS,  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide,  $h_k$  est le biais dû à l'horloge du récepteur, et  $e_k^i$  est le bruit résiduel vu comme étant la superposition du bruit d'observation et des erreurs dues aux multi-trajets.

L'instabilité de fréquence de l'horloge du récepteur est à l'origine du biais  $h_k$ . Un modèle du second ordre est généralement proposé pour décrire le comportement de l'horloge [32] :

$$h_k = h_{k-1} + d_{k-1} \Delta T + \Delta T \varepsilon_k^h, \quad (5.9)$$

$$d_k = d_{k-1} + \Delta T \varepsilon_k^d, \quad (5.10)$$

où  $d_k$  est la dérive de l'horloge,  $\varepsilon_k^h$  et  $\varepsilon_k^d$  étant des bruits blancs gaussiens dont la variance est liée au type de récepteur utilisé.

Le comportement du bruit résiduel  $e_k^i$  peut être scindé en deux phases. Une phase nominale pendant laquelle  $e_k^i$  peut être vu comme étant un bruit blanc gaussien,  $e_k^i = \varepsilon_k^i$ , et une phase perturbée où  $e_k^i = \varepsilon_k^i + a_k^i$ , où  $a_k^i$  est un bruit blanc uniforme dans un intervalle  $[-a_{max}^i, a_{max}^i]$  donné, représentant l'ampleur de l'effet du multi-trajet. Ce comportement peut s'écrire de manière générique comme  $e_k^i = \varepsilon_k^i + a_k^i \Delta N_k^i$ , où  $\Delta N_k^i$  est un accroissement poissonien traduisant l'apparition des multi-trajets. On peut aussi représenter chaque phase du comportement du bruit résiduel par un bruit blanc gaussien de variance donnée. Par conséquent, pour  $K$  satellites observés nous

aurons  $2^K$  représentations possibles. Pour limiter cette complexité de représentation, nous considérons plutôt chaque bruit résiduel comme étant à variance variable dans le temps. La question est alors de déterminer la loi régissant cette variation. Il est à noter que l'apparition et la disparition des multi-trajets peuvent induire une variation de la puissance du signal reçu.

La puissance d'un signal GPS est une mesure basique de sa qualité. Les niveaux de puissance des signaux GPS sont généralement spécifiés en termes de decibels par rapport à 1 watt de puissance (dBw). Les mesures de qualité souvent utilisés sont le rapport signal sur bruit (SNR) et le rapport porteuse sur bruit (C/No). Ce dernier mesure la puissance de la porteuse par rapport à celle du bruit dans une largeur de bande de 1 Hz. C'est un paramètre important dans l'analyse des performances d'un récepteur GPS qui affecte directement la précision des mesures de pseudo-distances et de phase de porteuse. Un lien peut donc être fait entre le C/No et la variance du bruit résiduel. Nous proposons de représenter le bruit résiduel  $e_k^i$  comme étant un bruit blanc gaussien de variance  $\alpha_i 10^{-\frac{s_k^i}{10}}$  où  $s_k^i$  est le C/No du satellite  $i$ . En première approximation nous supposons le coefficient  $\alpha_k$  constant quel que soit le satellite.

Nous pouvons dès lors adopter le modèle dynamique suivant pour notre problème :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{B}\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = m(\mathbf{x}_k) + \mathbf{z}_k \end{cases} \quad (5.11)$$

où

- $\mathbf{x}_k = (X_k \ Y_k \ Z_k \ \theta_k \ v_k \ d_k \ h_k \ g_k)^T$  et  $\mathbf{y}_k = (n_k \ \rho_k^1 \ \rho_k^2 \ \dots \ \rho_k^K)^T$  désignent les vecteurs d'état et d'observation du système lorsque  $K$  satellites sont observés ;
- les fonctions non-linéaires  $f(\cdot)$  et  $m(\cdot)$  sont respectivement données par :

$$f(\mathbf{x}_{k-1}) = \begin{pmatrix} X_{k-1} - (\sin(\lambda) \cos(\theta_{k-1}) + \sin(\phi) \cos(\lambda) \sin(\theta_{k-1})) v_{k-1} \Delta T \\ Y_{k-1} + (\cos(\lambda) \cos(\theta_{k-1}) + \sin(\phi) \sin(\lambda) \sin(\theta_{k-1})) v_{k-1} \Delta T \\ Z_{k-1} + \cos(\phi) \sin(\theta_{k-1}) v_{k-1} \Delta T \\ \theta_{k-1} \\ v_{k-1} \\ d_{k-1} \\ h_{k-1} + d_{k-1} \Delta T \\ g_{k-1} \end{pmatrix}$$

et

$$m(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta T}{g_k} v_k \\ \sqrt{(X_k^1 - X_k)^2 + (Y_k^1 - Y_k)^2 + (Z_k^1 - Z_k)^2 + ch_k} \\ \sqrt{(X_k^2 - X_k)^2 + (Y_k^2 - Y_k)^2 + (Z_k^2 - Z_k)^2 + ch_k} \\ \vdots \\ \sqrt{(X_k^K - X_k)^2 + (Y_k^K - Y_k)^2 + (Z_k^K - Z_k)^2 + ch_k} \end{pmatrix} ;$$

– la matrice  $\mathbf{B}$  est, elle, donnée par :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) \sin(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les distributions de probabilité des vecteurs de bruit de dynamique  $\mathbf{w}_k$  et d'observation  $\mathbf{z}_k$  sont telles que<sup>1</sup> :

$$\mathbf{w}_k = (\varepsilon_k^z \quad \varepsilon_k^\theta \quad \varepsilon_k^v \quad \varepsilon_k^d \quad \varepsilon_k^h \quad \varepsilon_k^g)^T \sim (1 - \beta)\Gamma(\mathbf{w}_k, \mathbf{Q}_1) + \beta\Gamma(\mathbf{w}_k, \mathbf{Q}_2) \quad (5.12)$$

$$\mathbf{z}_k = (\varepsilon_k^n \quad e_k^1 \quad e_k^2 \quad \dots \quad e_k^K)^T \sim \Gamma(\mathbf{z}_k, \mathbf{R}_k). \quad (5.13)$$

$\beta$  est la probabilité de changement de cap. Dans les équations (5.12) et (5.13), toutes les distributions gaussiennes sont supposées centrées de covariances :

$$\mathbf{Q}_1 = \text{diag}((\sigma_z^2, \sigma_\theta^2, \sigma_v^2, \sigma_d^2, \sigma_h^2, \sigma_g^2)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \text{diag}((\sigma_z^2, (\sigma_\theta^2 + \theta_{max}^2/3), \sigma_v^2, \sigma_d^2, \sigma_h^2, \sigma_g^2)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}\left((\sigma_n^2, \alpha \times 10^{-s_t^1/10}, \alpha \times 10^{-s_t^2/10}, \dots, \alpha \times 10^{-s_t^K/10})\right) \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}$$

Rappelons que  $K$  désigne le nombre de satellites observés, nombre qui varie dans le temps, et  $s_k^i$  est le C/No du satellite numéroté  $i$  mesuré à l'instant  $k$ .

Le système ainsi modélisé est non-linéaire et non-gaussien. Dans le cas linéaire gaussien, il est bien connu que l'algorithme conduisant au filtre optimal est le filtre de Kalman. Dans le cas non-linéaire et/ou non-gaussien, nous pouvons recourir à différentes approximations comme le filtre de Kalman étendu ou le filtrage par mélange de gaussiennes. Nous avons adopté la technique du filtrage par mélange de gaussiennes plus adaptée à la non-gaussianité de notre problème.

### 5.1.1.2 Filtrage par mélange de gaussiennes

Le filtrage consiste à déterminer l'état du système  $\mathbf{x}_t$  à partir des observations. Pour ce faire, il sied de déterminer la densité conditionnelle  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$ <sup>2</sup> appelée *filtre*.

La technique de filtrage par mélange de gaussiennes fut introduite au début des années soixante dix [4, 90]. Nous pouvons établir la proposition suivante :

1.  $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{C})$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , désigne la distribution gaussienne multivariée de moyenne nulle et de covariance  $\mathbf{C}$ , i.e. :  $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a})$ ,  $|\mathbf{C}|$  étant le déterminant de la matrice  $\mathbf{C}$ .

2. La notation  $\mathbf{y}_{1:t}$  indique la prise en compte de toutes les mesures jusqu'à l'instant  $t$ .

**Proposition 1** *Supposons qu'à l'instant  $k-1$  le filtre, ou probabilité a posteriori, s'écrive comme suit :*

$$p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \sum_{n=1}^N \mu_{k-1}^n \Gamma(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1|k-1}^n, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^n), \quad \sum_{n=1}^N \mu_{k-1}^n = 1.$$

alors le filtre  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$  est donné par :

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \simeq \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^N \mu_k^{n,j} \Gamma(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}^{n,j}, \mathbf{P}_{k|k}^{n,j}) \quad (5.14)$$

avec

$$\mu_k^{n,j} = \frac{(1-\beta) \mu_{k-1}^n \Gamma(\mathbf{y}_k - m(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n), \mathbf{S}^{n,j})}{(1-\beta) \sum_{n=1}^N \mu_{k-1}^n \Gamma(\mathbf{y}_k - m(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n), \mathbf{S}^{n,1}) + \beta \sum_{n=1}^N \mu_{k-1}^n \Gamma(\mathbf{y}_k - m(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n), \mathbf{S}^{n,2})}$$

$$\mathbf{x}_{k|k}^{n,j} = f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n) + \mathbf{K}_k^{n,j} \left( \mathbf{y}_k - m(f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n)) \right) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{S}^{n,j} = \mathbf{M}(f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n)) \mathbf{P}_{k|k-1}^{n,j} \mathbf{M}(f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n))^T + \mathbf{R}_k \quad (5.16)$$

$$\mathbf{K}_k^{n,j} = \mathbf{M}(f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n)) \mathbf{P}_{k|k-1}^{n,j} (\mathbf{S}^{n,j})^{-1} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{n,j} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{n,j} - \mathbf{K}_k^{n,j} \mathbf{M}(f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n)) \mathbf{P}_{k|k-1}^{n,j} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{n,j} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n) \mathbf{P}_{k-1|k-1}^n \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n)^T + \mathbf{B} \mathbf{Q}_j \mathbf{B}^T \quad (5.19)$$

où  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n)$  est la matrice jacobienne de la fonction  $f(\cdot)$  évaluée en  $\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n$  alors que  $\mathbf{M}(f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n))$  est la matrice jacobienne de la fonction  $m(\cdot)$  évaluée en la prédiction  $f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^n)$  ;

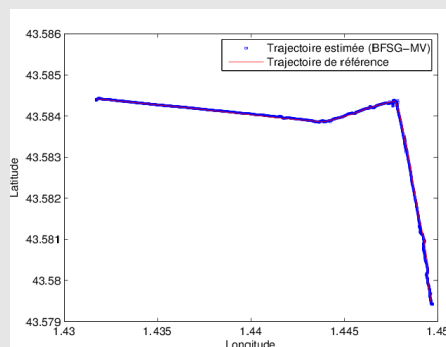
Nous pouvons noter que l'estimateur de l'état est alors obtenu en maximisant cette probabilité conditionnelle. Il est de ce fait donné par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^N \mu_k^{n,j} \mathbf{x}_{k|k}^{n,j} \quad (5.20)$$

En comparant  $p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})$  et  $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ , nous pouvons noter que le nombre de gaussiennes a doublé. En vue de limiter l'accroissement du nombre de ces gaussiennes, une étape de sélection peut s'avérer nécessaire. Ainsi, pour garder ce nombre égal à  $N$ , il suffirait, à chaque instant, de choisir les gaussiennes ayant les poids les plus élevés, puis de renormaliser. Il est à noter que la mise en oeuvre de cet estimateur revient à faire tourner plusieurs filtres de Kalman étendus et à les fusionner de façon optimale.

**Validation :** L'évaluation ci-dessous a été réalisée suite à une campagne de mesures effectuée en Janvier 2007 à Toulouse. Le relevé des données a été fait à partir d'un véhicule équipé d'un récepteur  $\mu$ blox TIM-LR, d'une antenne magnétique GPS trimble 39265-50 3V polarisée RHCP, d'un odomètre et d'un PC relié au récepteur  $\mu$ blox. Les données sont enregistrées à une fréquence de 4 Hz.

Le parcours géographique considéré, partant du pont Pierre de Coubertin à la gare SNCF de Saint-Agne, inclut une zone découverte (pont de Coubertin), et une zone fortement urbanisée (avenue des Recollets et avenue de l'URSS). L'avenue des Recollets est en outre plus étroite que l'avenue de l'URSS avec une densité d'arbres au bord de la chaussée beaucoup plus élevée.



On peut remarquer une reconstruction précise du parcours en utilisation l'algorithme développé (sans aide de la cartographie). Le tableau ci-dessous donne le pourcentage dans le temps pour lequel l'erreur est inférieure à une certaine valeur. On peut noter la supériorité de l'approche proposée (BFSG-MV) comparée au GPS et au GPS couplé avec EGNOS sans aide de la cartographie. Une erreur inférieure à 6m est garantie 80% du temps contre 9m pour le GPS aidé d'EGNOS.

	GPS+sélection	GPS+EGNOS	BFSG-MV
$e \leq 5$ m	33.79%	42.08%	71.22%
$e \leq 6$ m	44.89%	55.62%	81.41%
$e \leq 7$ m	54.26%	67.36%	88.22%
$e \leq 8$ m	61.59%	74.64%	92.02%
$e \leq 9$ m	67.28%	80.08%	94.70%
$e \leq 10$ m	72.38%	84.82%	96.16%



### 5.1.2 Estimation de l'attitude en vue de la navigation pédestre

Contrairement à la localisation des véhicules, la localisation d'un piéton peut être difficilement associée à une cartographie précise. Les voies piétonnes ne sont en général pas cartographiées. Par ailleurs, le GPS qui a révolutionné la localisation des véhicules n'est plus disponible dans les environnements fermés. Il est alors d'intérêt de recourir à des systèmes autonomes ne dépendant que des capteurs portés par le piéton. Dans ce cas, un ingrédient majeur est la reconstitution de l'attitude. Dans le cadre de la thèse d'Aida Makni, nous nous intéressons à la problématique de l'estimation d'attitude en utilisant des capteurs à bas coût, désormais disponibles dans les smartphones par exemple : gyroscope, accéléromètre, et magnétomètre. Au milieu de la pléthore de contributions qu'on peut trouver dans la littérature, un aspect innovant de nos travaux a été de proposer une modélisation alternative ainsi que des estimateurs innovants.

La plupart des estimateurs proposés dans la littérature, qu'ils soient basés sur le filtre de Kalman ou sur des observateurs déterministes, nécessitent l'établissement d'un modèle d'état dont l'aspect dynamique est basé sur la cinématique des corps rigides :

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes \bar{\omega}, \quad (5.21)$$

$q$  et  $\bar{\omega}$  étant les quaternions représentant respectivement l'attitude du corps et sa vitesse de rotation. Dans l'idéal, d'une connaissance parfaite de la vitesse de rotation, on devrait par intégration de cette équation différentielle retrouver l'attitude  $q$ . Cependant, comme tout capteur, le gyroscope ne fournit que des mesures bruitées de la vitesse angulaire. Il est dès lors nécessaire d'associer à cette équation un modèle d'observation basé sur les mesures de l'accéléromètre et du magnétomètre. Le modèle en temps discret le plus communément utilisé est le suivant [15] :

$$q_{k+1} = [I_4 + \frac{\Delta t}{2}\Omega_k]q_k + w_{g,k}^q, \quad (5.22)$$

$$0_{8 \times 1} = \begin{pmatrix} H_{mg,k} \\ H_{acc,k} \end{pmatrix} q_k + \begin{pmatrix} w_{mg,k}^q \\ w_{acc,k}^q \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

où  $\Delta t$  désigne la période d'échantillonnage,  $\Omega_k$ ,  $H_{mg,k}$ , et  $H_{acc,k}$  étant des matrices contenant les mesures de vitesse angulaire, celles issues du magnétomètre et celles issues de l'accéléromètre, l'aspect stochastique lié aux bruits de mesure étant encapsulé par les bruits  $w_{mg,k}^q$ ,  $w_{acc,k}^q$  et  $w_{g,k}^q$ .

Cette modélisation ne tient pas compte de l'accélération propre du corps rigide ou d'éventuelles perturbations magnétiques. En vue de compenser ces effets indésirables, nous avons développé des modèles alternatifs. Comme stipulé précédemment, l'intégration de l'équation (5.22) fournit le quaternion  $q_k$  aux erreurs d'intégration près. La contribution est d'utiliser les mesures de magnétomètres et/ou celles de l'accéléromètre pour déterminer le modèle du process. Focalisons nous sur l'utilisation des mesures du magnétomètre pour la détermination du modèle du process.

**Proposition 2** Soit  $q_k^\omega$  l'attitude estimée via l'intégration des mesures du gyroscope. Le système décrit par les équations (5.22) peut être récrit de manière équivalente sous la forme du système implicite suivant :

$$H_{mg,k+1}q_{k+1} = H_{mg,k}q_k + v_{k+1}, \quad (5.24)$$

$$z_k = N_k q_k + n_k, \quad (5.25)$$

où  $z_k = \begin{pmatrix} q_k^\omega \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}$ ,  $N_k = \begin{pmatrix} I_{4 \times 4} \\ H_{acc,k} \end{pmatrix}$  et  $n_k = \begin{pmatrix} w_{g,k}^q \\ w_{acc,k}^q \end{pmatrix}$ , et  $v_{k+1}$  étant un bruit de moyenne nulle et de covariance  $\frac{(\Delta t)^2}{4} \Xi(q_k) R_g \Xi(q_k)^T + \frac{3}{4} \Delta t^2 \sigma_g^2 \sigma_\alpha^2 I_4$ , avec

$$\Xi(q_k) = \begin{pmatrix} -q_{k,1} & -q_{k,2} & -q_{k,3} \\ q_{k,0} & -q_{k,3} & q_{k,2} \\ q_{k,3} & q_{k,0} & -q_{k,1} \\ -q_{k,2} & q_{k,1} & q_{k,0} \end{pmatrix}.$$

$q_{k,j}$   $j = 0, 1, 2, 3$  étant les composantes du quaternion.

La matrice  $H_{mg,k+1}$  est par construction une matrice anti-symétrique de rang déficient. Par conséquent, le système obtenu est un système implicite (singulier) [73, 101].

**Proposition 3** Etant donné  $\hat{q}_k$ , le quaternion estimé à l'instant  $k$ , et  $P_k$  sa matrice de covariance d'erreur correspondante, le meilleur estimateur linéaire du quaternion  $q_{k+1}$  est donné par :

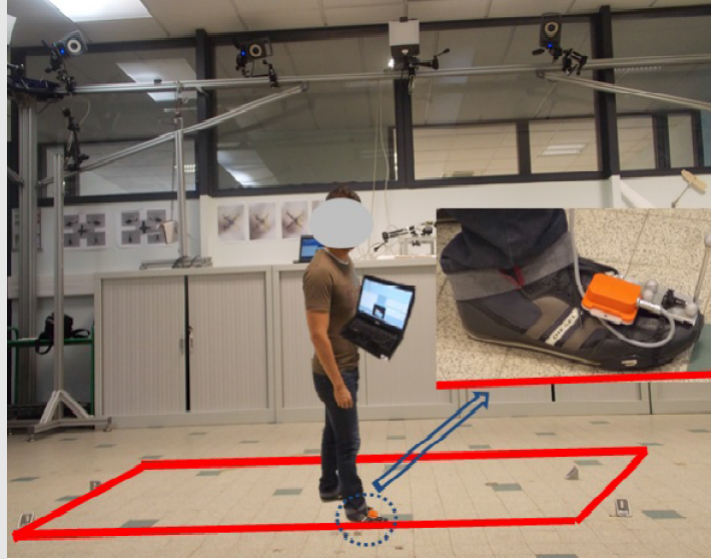
$$\hat{q}_{k+1} = P_{k+1} (V_{1,M}^{-1} q_{k+1}^\omega + H_{mg,k+1} V_{2,M}^{-1} H_{mg,k} \hat{q}_k) \quad (5.26)$$

$$P_{k+1} = (V_{1,M}^{-1} + H_{mg,k+1}^T V_{2,M}^{-1} H_{mg,k+1} + H_{acc,k+1}^T V_3^{-1} H_{acc,k+1})^{-1}. \quad (5.27)$$

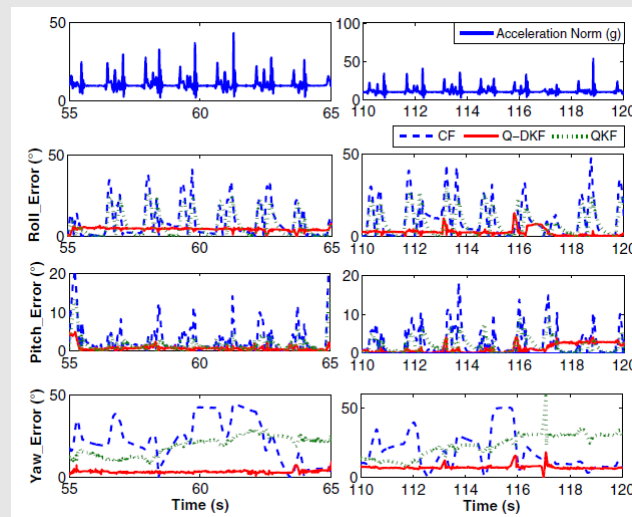
avec

$$\begin{aligned} V_{1,M} &= \frac{(\Delta t)^2}{4} \Xi(q_k) R_g \Xi(q_k)^T + \frac{3}{4} \Delta t^2 \sigma_g^2 \sigma_\alpha^2 I_4, \\ V_{2,M} &= H_{mg,k} P_k H_{mg,k}^T + \frac{1}{2} \Xi(q_k) R_m \Xi(q_k)^T + \frac{3}{4} \sigma_m^2 \sigma_\alpha^2 I_4, \\ V_3 &= \frac{1}{4} \Xi(q_k) R_a \Xi(q_k)^T + \frac{3}{4} \sigma_a^2 \sigma_\alpha^2 I_4. \end{aligned}$$

**Validation :** Des tests sur la marche d'un piéton ont été réalisés dans la plateforme MOCA du Gipsa-Lab. Une centrale inertielle MTi-IMU de Xsens Technologies montée sur le pied du piéton a été utilisée. Elle comprend un accéléromètre 3 axes, un gyroscope 3 axes et un magnétomètre 3 axes échantillonnés à 100 Hz.



La figure ci-dessus décrit les erreurs d'estimation des angles d'Euler (déduits du quaternion estimé) pour l'algorithme proposé (QDKF) et des algorithmes de la littérature, parmi les plus utilisés.

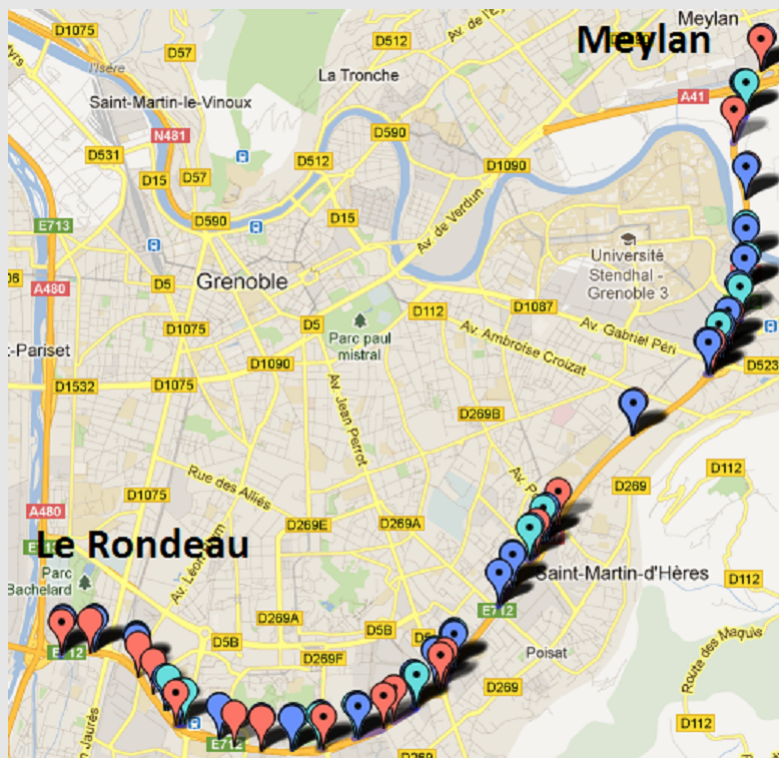


Grâce cette modélisation et à l'estimateur associé, une réduction significative de l'erreur d'estimation est obtenue.

## 5.2 Estimation et prédiction de l'état du trafic automobile

Dans nos sociétés, l'usage de l'automobile est encore très indiqué, que l'usage soit partagé ou non. Les contraintes d'espace et encore moins l'éveil de conscience écologique ne permettent pas d'étendre l'infrastructure routière. Il faut réguler le trafic routier. Pour ce faire, il est impérieux d'estimer avec finesse l'état du trafic (densité et vitesse) en vue de mettre en place des stratégies de contrôle efficaces. L'ingrédient majeur c'est bien évidemment les données. C'est pour ce faire que NeCS, mon équipe de recherche, a mis en place l'initiative Grenoble Traffic Lab (GTL).

**Grenoble Traffic Lab (GTL)** La rocade sud de Grenoble, avec une longueur de 10km, comporte 11 entrées et 10 sorties. Le sens Est/Ouest ( de Meylan au Rondeau) a été instrumenté dans le cadre de l'initiative GTL. La collecte des données est réalisée par l'intermédiaire des capteurs de type Sensys Networks VDS240 installés dans la chaussée. Les stations sont constituées de trois paires de capteurs, deux pour la voie principale et une paire pour la rampe. Les capteurs constituant la paire sont placés à une distance de 4,5 m environ. Les données de trafic sont collectées toutes les 15 secondes et transférées à un serveur géré par GTL (Grenoble Traffic Lab).



### 5.2.1 Estimation de l'état du trafic

Les modèles décrivant la dynamique du trafic ont été introduits dès le milieu du 20ème siècle. Le modèle le plus utilisé est le modèle LWR basé sur la dynamique des fluides [63]. Au delà de sa formulation sous forme d'équation aux dérivées partielles, ce modèle est souvent utilisé sous sa forme discrète ; le schéma de discrétisation le plus stable ayant donné lieu au modèle CTM (*Cell Transmission Model*) [19].

Considérons une représentation du réseau routier à l'aide d'un graphe  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  où chaque sommet représente la jonction entre deux portions de route que nous appellerons cellules. Chaque cellule  $i$  est caractérisée par une densité  $\rho_i(k)$ , exprimée en nombre de véhicules par kilomètre, qui varie selon l'équation suivante :

$$\rho_i(k+1) = \rho_i(k) + \frac{1}{L_i}(f_i^{in}(k) - f_i^{out}(k)) \quad (5.28)$$

où  $L_i$ ,  $f_i^{in}$ , et  $f_i^{out}$  désignent respectivement la longueur de la cellule, le flux entrant et le flux sortant.

Le modèle CTM stipule que le flux entrant dans une cellule est une fonction non-linéaire de sa densité et de celle de la cellule en amont. Plus précisément, ce flux est le minimum entre la demande (fonction de la densité de la cellule en amont) et l'offre (fonction de la densité de la cellule). Si la demande est plus élevée que l'offre, la cellule est congestionnée. Dans le cas contraire elle est fluide.

Soit  $\boldsymbol{\rho}$  le vecteur des densités de toutes les cellules du réseau. Ce vecteur définit l'état du réseau. On est donc intéressé par estimer l'état du réseau à partir des mesures disponibles sur le réseau. Il est à noter que flux et densité sont habituellement reliés via une fonction nonlinéaire appelée *diagramme fondamentale*. Une représentation communément utilisée est le diagramme fondamental triangulaire qui sépare les deux régimes possibles d'une cellule : fluide ou congestionné. Tenant compte de cette forme triangulaire, on peut définir la dynamique du réseau comme étant affine par morceaux. Le système est par conséquent un système linéaire par commutation, la loi de commutation dépendant de l'état du réseau :

$$\boldsymbol{\rho}(k+1) = \mathbf{A}_{s(k)}\boldsymbol{\rho}(k) + \mathbf{B}_{s(k)}\boldsymbol{\varphi}(k) + \bar{\mathbf{B}}_{s(k)}\boldsymbol{\rho}_m \quad (5.29)$$

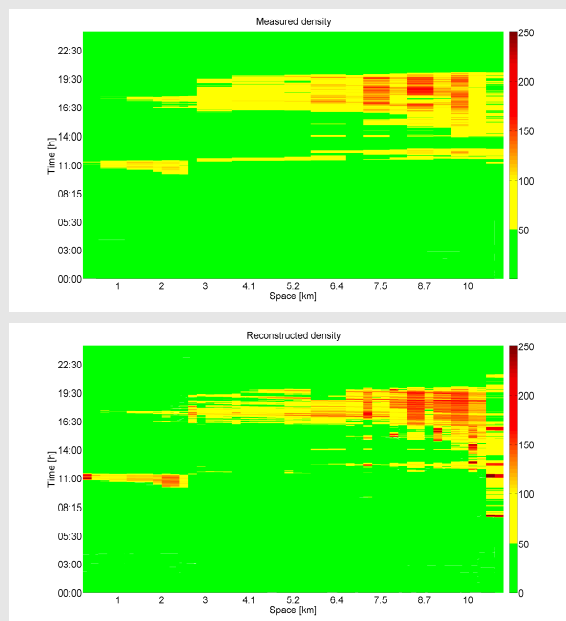
$$s(k) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\rho}(k), \boldsymbol{\varphi}(k)) \quad (5.30)$$

$$\mathbf{y}(k) = h(\boldsymbol{\rho}(k), s(k)) \quad (5.31)$$

où  $\boldsymbol{\varphi}$  définit le vecteur d'entrée formé du flux mesurable entrant et sortant tandis que  $s(k)$  est le mode actif du système. Les définitions exactes des matrices et vecteurs et définissant ce système peuvent être trouvées dans [70].

Dans la thèse de Luis Leon Ojeda, une étude fine a été réalisée sur cette loi de commutation et un observateur de type Luenberger développé en vue de réaliser la tâche d'estimation.

**Validation** : Sur le graphique ci-dessous, nous illustrons les performances d'estimation de l'observateur proposé dans la thèse de Luis Leon Ojeda. Les données correspondent aux mesures effectuées sur la rocade de Grenoble le 9 mars 2014. La colorimétrie indique la valeur de la densité.



On peut noter une bonne estimation de l'état du réseau même durant les périodes de forte congestion. On retrouve la dynamique communément observée stipulant que les congestions de l'après-midi sont les plus sévères sur cet axe routier. La congestion se crée en amont et se propage vers l'aval alors que son évanouissement suit la dynamique inverse.

Avec l'avènement du GPS embarqué dans les véhicules, un grand marché de la donnée du trafic est en phase d'expansion. Aujourd'hui, souvent à l'insu du conducteur, un véhicule produit des données de vitesse qui, couplées avec la localisation du véhicules, peuvent être exploitées pour estimer l'état du trafic, en termes de vitesse<sup>3</sup>. Cependant, les informations de flux et de densité ne peuvent pas être inférées grâce à ces seules mesures. Il est dès lors impérieux de pouvoir fusionner ces données, dites FCD (*Floating Car Data*), avec les données fournies par les capteurs de site (boucles magnétiques, magnétomètres, radars, caméras). Ces capteurs sont installés à des endroits fixes et mesurent des données relatives à une portion de la route ; ces données étant le flux  $\varphi_i(k)$  (nombre de véhicules par unité de temps) ainsi que l'occupation  $o_i(k)$  du capteur, définie comme étant le pourcentage de temps durant

3. Les traces GPS ne sont en général pas fournies pour des raisons évidentes d'atteinte à la vie privée. Ainsi, on utilise plutôt des vitesses moyennes de véhicules équipés d'un GPS présents sur un secteur donné à l'instant de mesure

lequel un véhicule est sur la station de mesure. L'occupation donne une approximation de la densité :  $\rho_i(k) \approx \frac{o_i(k)}{100 * l_{av}}$ , où  $l_{av}$  est la longueur moyenne des véhicules (en km).

Contrairement aux capteurs de site, l'information issue des FCD résulte d'un moyennage sur une période pouvant être longue. Par exemple, les capteurs sur site du GTL fournissent une mesure toutes les 15 secondes alors que les données FCD fournies par INRIX, un des leaders sur le marché de la donnée du trafic, sont agrégées par minute. Les pratiques usuelles d'agrégation, à cause du faible taux de pénétration, peuvent aller jusqu'à 10 minutes. Le faible taux de pénétration peut poser question vis-à-vis de la représentativité de la mesure fournie. Dans [66], ce problème est résolu via un observateur nonlinéaire dont la description, ici, ne saurait être suffisamment concise. Nous renvoyons donc le lecteur à la lecture de cette référence.

### 5.2.2 Prédiction de l'état du trafic

Pour une mobilité intelligente, il est nécessaire d'être en mesure de prévoir l'état du trafic, en particulier en termes de temps de parcours d'une origine vers une destination donnée. Une telle information, lorsqu'elle est fiable, permet aux usagers d'organiser leurs déplacements de manière plus efficace : partir plus tôt ou plus tard pour éviter d'être bloqué dans une congestion. Dans le cadre de la thèse de Luis Leon Ojeda et de celle d'Andres Ladino Lopes, nous nous sommes intéressés à la prédiction des temps de parcours, d'une part en n'utilisant que les séries temporelles issues des mesures de vitesse, et d'autre part en couplant ces mesures avec des observateurs suffisamment efficaces pour reconstruire l'état courant.

Une caractéristique importante du trafic est la reproductibilité de certains phénomènes. Considérons par exemple les mesures de temps de parcours effectuées sur la rocade sud via le GTL : on peut remarquer que les instants d'occurrence des congestions sont relativement les mêmes, la sévérité de la congestion variant quant à elle d'une période de la journée à l'autre. Une journée typique peut être scindée en 4 régimes :

- Activité matinale (7h-10h)
- Pause méridienne : 10h-16h
- Activité post-méridienne : 16h-19h
- Activité nocturne : 19h-7h

Les différentes données historiques peuvent donc être clusterisées suivant ces quatre périodes. L'hypothèse principale qui sous-tend nos travaux est l'existence dans la base de données historiques d'une série temporelle suffisamment proche de la réalisation courante. En d'autres termes, les données historiques, par régime d'activité, peuvent être organisées en clusters suffisamment homogènes. Chaque cluster est caractérisé par un centroïde et une dispersion autour de ce centroïde. On suppose alors que le centroïde du cluster est une version bruitée de la réalisation du temps de parcours du jour d'intérêt :

$$y(k) = tt^D(k) + \varepsilon^D(k), \quad (5.32)$$



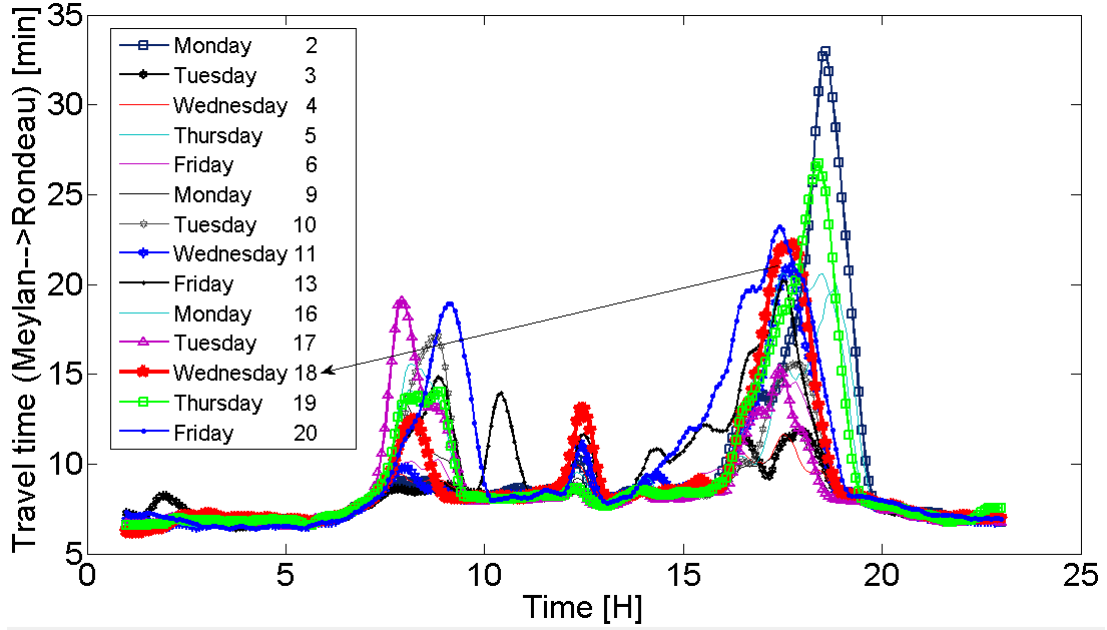


FIGURE 5.1 – Temps de parcours expérimenté par un conducteur qui traverse la Rocade sud de Grenoble pour différents instants de départ (mesures effectuées du 2 au 20 Septembre 2013).

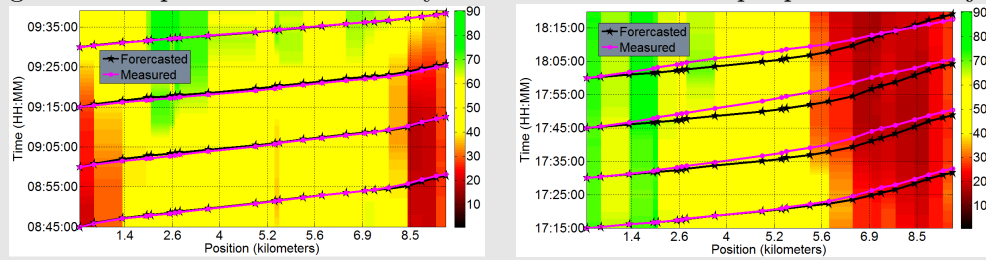
$y(k)$  étant le centroïde du cluster considéré et  $\varepsilon^D(k) \sim \Gamma(\varepsilon^D, R^D(k))$ . En l'absence de modèle de connaissance, l'évolution du temps de parcours est modélisée par une marche aléatoire :

$$tt^D(k) = tt^D(k-1) + w^D(k), \quad w^D(k) \sim \Gamma(w^D - q^D, Q^D) \quad (5.33)$$

Un enjeu majeur est d'une part l'estimation des statistiques des bruits de mesure et de process et d'autre part le choix du cluster. Pour ce dernier, assigner les données du jour courant à un cluster ne peut se faire que sur la base des données du jour disponibles. Cependant, rien ne garantit que deux séries temporelles suffisamment proches jusqu'à un temps donné le seront encore dans le futur. Pour tenir compte de cette variabilité, une approche multi-modèle est actuellement envisagée dans le cadre de la thèse d'Andres Ladino Lopes. S'agissant, de l'apprentissage des paramètres statiques des bruits, un filtre de Kalman adaptatif a été considéré dans les travaux de Luis Leon Ojeda.



**Validation :** Afin d'illustrer les résultats, nous avons choisi les données du mercredi 18 Septembre 2013. Deux scénarios de prédiction sont considérés. Le premier correspond à 08h45 et le deuxième à 17h15. Les figures ci-dessous décrivent l'évolution du temps de parcours prédit et mesuré. L'arrière plan de ces figures correspond à la vitesse moyenne mesurée dans chaque portion du trajet.



Globalement, malgré la simplicité du modèle, on arrive à reconstruire assez fidèlement les temps de parcours expérimentés.

Le calcul du temps de parcours entre deux stations de mesure est effectué en divisant la distance entre les deux stations par la moyenne des vitesses mesurées aux deux stations. Plus les stations sont proches plus ce calcul est précis. Cependant, il n'est pas judicieux de déployer des stations de mesures beaucoup trop rapprochées car cela a un coût d'installation et de maintenance non négligeable. Tenant compte des équations qui régissent la dynamique du flux routier (modèle CTM) il est possible de subdiviser la route en des cellules plus fines et recourir à un observateur pour reconstruire l'état (densité) du trafic dans les différentes cellules. Ensuite grâce à la relation liant densité et flux on peut reconstruire une information de vitesse. Par conséquent, étant donné une information de vitesse reconstruite tout au long de la route, et étant donné les prédictions des vitesses futures (en utilisant la même approche que dans le cas de la prédiction des temps de parcours) on utilise le modèle CTM pour prédire l'état du réseau. Les premiers résultats obtenus montrent que l'utilisation du modèle dans le schéma de prédiction permet d'améliorer les résultats principalement pour des horizons de prédiction court (inférieur à 15 minutes)

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résumé nos différentes contributions liées à la mobilité intelligente. D'une façon synthétique les principales contributions sont les suivantes :

- Positionnement précis en milieu urbain : En encapsulant les mesures brutes des récepteurs GPS et les mesures odométriques d'un véhicule, à l'aide des filtres à base de sommes de Gaussiennes nous avons développé des solutions de filtrage efficaces permettant de localiser un véhicule en milieu urbain malgré les phénomènes de masquage et de multitrajets.
- Estimation d'attitude : Nous avons développé une approche de modélisation innovante qui permet de mitiger les effets des accélérations propres et des per-

turbations magnétiques. Les modèles associés sont singuliers. Par ailleurs, la question de la gestion de l'énergie lors de l'utilisation des capteurs énergivores comme le gyro a aussi été abordée. Grâce à des techniques de détection, nous avons proposé des solutions permettant au capteur de passer d'un mode de consommation d'énergie à un autre de façon intelligente.

- Placement optimal des capteurs, estimation et prédiction du trafic routier : Différents estimateurs ont été développés pour traiter le problème de la prédiction et de l'estimation du trafic routier. Dans le cas de la prédiction, en utilisant les données historiques comme des pseudo-observations, nous traitons le problème comme étant un problème de filtrage. L'estimation quant à elle est basée sur des observateurs de type Luenberger à commutation.

Ces résultats ont été obtenus grâce à la collaboration avec :

- Doctorants et post-doctorants : L. Leon Ojeda, A. Ladino Lopes, A. Makni, E. Lovisari
- Enseignants-Chercheurs : C. Canudas de Wit (Gipsa-Lab), H. Fourati (Gipsa-Lab), A. Monin (LAAS, Toulouse)

Ils ont donné lieu aux cinq principales publications suivantes

- A. MAKNI, H. FOURATI, and A.Y. KIBANGOU, "Energy-aware Adaptive Attitude Estimation Under External Acceleration", IEEE Trans. on Mechatronics (accepté, à paraître en 2016)
- E. LOVISARI, C. CANUDAS DE WIT, and A.Y. KIBANGOU, "Flow and Density Reconstruction and Optimal Sensor Placement for Road Transportation Networks", Transportation Research B (Première révision)
- C. CANUDAS DE WIT, F. MORBIDI, L. LEON OJEDA, A.Y. KIBANGOU, I. BELLICOT, and P. BELLEMAIN "Grenoble Traffic Lab : An experimental platform for advanced traffic monitoring and forecasting", IEEE Control Systems Magazine, vol. 35, No 3, pp. 23-39, 2015.
- L.R. LEON OJEDA, A.Y. KIBANGOU, and C. CANUDAS de WIT "Online dynamic travel time prediction using speed and flow measurements". 12th European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, July 2013.
- A.Y. KIBANGOU and A. MONIN, "GPS based Land Vehicle Positioning using Gaussian Sum Filters", ICASSP, March 30-April 4, 2008, Las Vegas, Nevada, USA.

# Prospective

## Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Systèmes cyberphysiques sécurisés . . . . .</b>	<b>88</b>
6.1.1	La confidentialité . . . . .	88
6.1.2	L'intégrité . . . . .	92
<b>6.2</b>	<b>Données massives multidimensionnelles : application à l'analyse et la prédiction du trafic . . . . .</b>	<b>93</b>
6.2.1	Estimation des matrices origine-destination . . . . .	95
6.2.2	Clusterisation dynamique des flux . . . . .	95
6.2.3	Prédiction des temps de parcours dans un contexte multi-origines multi-destinations . . . . .	96

En tenant compte des leçons apprises durant cette dernière décennie dans mes différentes activités de recherche, des problèmes ouverts rencontrés ainsi que des enjeux sociétaux actuels et futurs, ma prospective de recherche s'articule autour de deux thématiques :

1. les systèmes en réseaux (systèmes cyberphysiques) sécurisés ; principalement au sens de la préservation de la vie privée ;
2. les données massives multidimensionnelles.

Le domaine d'application privilégié sera celui de la mobilité intelligente.



## 6.1 Systèmes cyberphysiques sécurisés

D'un point de vue purement informatique, la sécurité vise cinq principaux objectifs :

- l'intégrité, c'est-à-dire garantir que les données sont bien celles que l'on croit être : il s'agit alors de vérifier que les données échangées n'ont pas été altérées.
- la confidentialité : elle consiste à rendre l'information inintelligible à des tiers ne participant pas à la transaction ;
- la disponibilité : il s'agit de garantir l'accès à un service ou à des ressources ;
- la non répudiation : il s'agit de s'assurer qu'aucun des correspondants ne peut nier une transaction ;
- l'authentification : elle consiste à assurer l'identité de l'utilisateur, c'est-à-dire à garantir à chacun des correspondants que son partenaire est bien celui qu'il croit être.

Dans les systèmes cyberphysiques qui nous intéressent, les différents nœuds du réseau collaborent en vue de réaliser collectivement une certaine tâche. Celle-ci passe en général par la mise en commun d'informations locales. Dans le problème du consensus, par exemple, l'information purement locale constitue l'état initial du système. Contrairement aux systèmes d'information généraux, la dimension physique est à considérer. Il n'est pas nécessaire de rajouter des boucles de cryptage alors que la cohérence physique des données peut suffire à analyser la sécurité d'un système cyberphysique. Nous allons nous intéresser à deux objectifs : la confidentialité et l'intégrité.

### 6.1.1 La confidentialité

Reprenons le cas du consensus. L'information privée est l'état initial du système. Cette information est échangée avec les voisins directs qui définissent un premier cercle de confidentialité. Si un nœud n'appartenant pas à ce cercle de confidentialité parvient à inférer ladite information, la confidentialité est rompue. En termes de théorie de système, il s'agit alors d'étudier l'observabilité du système global ; la non-observabilité garantissant la confidentialité. Supposons à présent que l'on veuille garder l'information privée secrète même vis-à-vis de ses voisins. Il est alors nécessaire d'encoder l'information locale tout en altérant le moins possible les performances du système global.

#### 6.1.1.1 Observabilité complète et observabilité partielle

De nos travaux antérieurs sur l'observabilité des réseaux de consensus lorsque le graphe sous-jacent est régulier, nous avons pu caractériser un sous-ensemble conséquent des graphes distance-réguliers non-observables. Pour rappel, il s'agit des graphes distance-réguliers de  $N$  nœuds, caractérisés par un diamètre  $D$  et une valence  $K$  tels que  $DK < N - 1$ . Il est alors intéressant d'étendre ce résultat aux graphes les plus généraux possibles et d'aller au-delà du problème du consensus. On peut noter que,

telle que formulée, la condition  $DK < N - 1$  ne fait intervenir que des propriétés topologiques du graphe (Diamètre, valence, nombre de nœuds). Dans une conjecture récente, nous sommes à mesure de montrer que la variable  $D$  ici est plutôt en relation avec des propriétés spectrales du graphe.  $D$  tient compte du nombre de valeurs propres distinctes de la matrice d'état du réseau. Dans le cas où la topologie est de type distance-régulier, le nombre de valeurs propres distinctes est égal au diamètre. Nous envisageons aussi l'extension des résultats d'observabilité obtenus pour les graphes distance-réguliers en considérant tout d'abord le cas des graphes ayant des composantes fortement distance-régulières. De tels graphes peuvent être obtenus en rajoutant des nœuds à un graphe distance-régulier. La question de fond est : *que devient l'observabilité si on rajoute un ou plusieurs nœuds au graphe ?*. Peut-on rendre observable un système représenté par un graphe distance-régulier non-observable en lui rajoutant un nœud ? Illustrons cette problématique en considérant le cas d'un graphe chaîne. Considérons un graphe à 5 nœuds (voir figure 6.1). Le graphe n'est pas observable du nœud numéro 3 [80]. Cependant, si un 6ème nœud est rajouté à une extrémité du graphe, le graphe augmenté devient observable du nœud 3. Si deux nœuds sont rajoutés à la même extrémité, le nœud numéro 4 change de statut ; le graphe n'est plus observable de ce nœud. Il est clair que suivant le type d'évolution

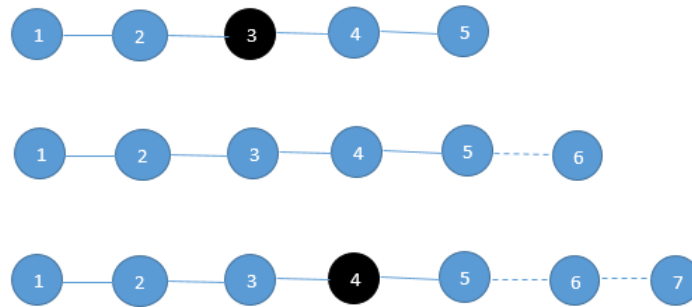


FIGURE 6.1 – Observabilité d'un nœud dans un graphe chaîne dynamique : en noir les nœuds à partir desquels l'observabilité n'est pas vérifiée.

dynamique du graphe, tous les nœuds n'auront pas le même comportement. Ainsi, dans le cas du graphe chaîne, si celui-ci croît en taille d'une seule extrémité, les seuls nœuds à partir desquels le système sera toujours observable sont les nœuds 1 et 2. Peut-on dès lors trouver une caractérisation plus formelle de ce phénomène, autrement dit, définir une classification plus formelle des nœuds du graphe originel ? Jusque là, nous nous sommes intéressés au concept d'observabilité complète, c'est-à-dire la reconstruction complète de l'état initial. Il peut s'avérer que seul un sous-ensemble d'états soit crucial. Il s'agira alors de faire en sorte que ce sous-ensemble n'appartienne pas au sous-espace d'observabilité, si on désire les protéger. C'est la notion d'observabilité partielle. Cette notion sera à étudier et à caractériser à l'instar de l'observabilité complète. Dans le cas de la gestion du trafic urbain, il

n'est pas nécessaire d'être en mesure de reconstruire l'état de chaque artère. Il suffit de reconstruire les états des artères les plus cruciales.

### 6.1.1.2 Respect différentiel de la vie privée

Comme déjà indiqué, dans la collaboration entre nœuds il peut s'avérer qu'un nœud désire collaborer activement tout en gardant secrète sa valeur initiale. Illustrons cette problématique dans le cadre des applications de la ville intelligente. En effet, pour des villes plus sûres et moins congestionnées, les technologies de l'information et de la communication offrent un potentiel d'applications énorme, faisant interagir les usagers, une infrastructure physique et des outils de communication et de calcul. La participation des usagers sera d'autant plus effective que ceux-ci ont l'assurance du respect de leur vie privée. Les usagers ne souhaitent pas en général divulguer leurs informations personnelles mais espèrent néanmoins avoir des services performants. La multiplication des sources d'information et le recours aux réseaux de communications augmentent les risques de violation de la vie privée. On peut croire qu'il suffirait de surprotéger la transmission d'information entre les usagers et les gestionnaires des systèmes cyber-physiques en chiffrant les communications par exemple. Pourtant, il a été montré qu'en recoupant les informations, anonymes, de différentes sources, il est possible de remonter à l'information cachée [94]. Une technique populaire d'anonymisation est d'assurer qu'une mesure donnée ne puisse être attribuée qu'à un groupe de  $k$  entités, c'est le concept du  $k$ -anonymat [94, 41]. Ce concept n'est, cependant, pas vraiment adapté aux séries temporelles résultant de modèles dynamiques. En effet, dans ce cas, la corrélation de la série temporelle est importante et peut être utilisée pour inférer les données manquantes et reconstruire des trajectoires. C'est pourquoi le concept de respect de vie privée différentiel a été récemment introduit dans la littérature [44, 61]. Le principe est que chaque nœud rajoute intentionnellement du bruit aux messages qu'il transmet. Les caractéristiques de ce bruit doivent garantir un consensus approximatif. Il y a donc dans ce concept une dualité entre exactitude du consensus et protection de la vie privée. Pour des problématiques de type estimation d'état distribué, la notion de protection de vie privée est à définir. Par exemple, dans le cas d'un observateur de type Luenberger dans lequel tous les nœuds estiment le même état, il est difficile de caractériser la notion de vie privée, sauf si le modèle d'observation local peut être révélateur de certaines propriétés qu'on souhaiterait garder secrètes. Par exemple dans la poursuite d'une cible, le modèle d'observation peut être révélateur de la localisation du nœud qui observe. Cette information peut donc nécessiter une certaine protection. Un autre scénario intéressant est le cas où l'état est hybride, dans le sens où une partie est locale et l'autre est globale (chévauchement d'état [91]). Ces différents cas d'étude méritent d'être considérés à court et moyen terme, le sujet de la protection de la vie privée dans les systèmes en réseaux étant très récemment apparu dans la littérature [61].

Contrairement à la plupart des contributions dans la littérature, nous nous poserons la question sur le consensus en temps fini préservant la vie privée. Contrairement

au respect différentiel de la vie privée, ici l'objectif est d'atteindre un consensus exact tout en gardant secrète sa valeur locale. De nouveaux protocoles sont donc à imaginer.

### 6.1.1.3 Commande du réseau

Dans ce qui précède, tout comme dans nos travaux antérieurs, nous avons adopté un point de vue d'"analyste" de système. Il nous semble intéressant de nous placer aussi du côté concepteur de systèmes. Les questions suivantes sont à considérer :

- Quels liens activer ou désactiver en vue de rendre un système observable ou non-observable ?
- Quels liens activer ou désactiver pour préserver la vie privée (non-observabilité) tout en rendant les entrées inconnues détectables ?

Cette problématique est différente de celle considérée dans la littérature où la question est liée au placement des capteurs, c'est-à-dire où placer les capteurs pour rendre le système observable. Ici, la problématique est plutôt, comment modifier la dynamique du réseau de sorte à garantir certaines propriétés, l'observabilité, complète ou partielle, en occurrence.

On dispose de différents tests pour l'observabilité : rang de la matrice de Kalman, rang du Grammien d'observabilité, test de PBH. Le mot clé dans tous ces tests est la notion de rang d'une matrice. On peut donc formuler un problème de minimisation de rang si on désire rendre le système non observable. Les problèmes de minimisation de rang sont des problèmes non-convexes qui trouvent une relaxation convexe via la minimisation du rang nucléaire (somme des valeurs singulières) [27]. Cependant, les contraintes structurelles et le fait que des monômes de la matrice d'état du réseau apparaissent dans la fonction de coût, du moins dans le cas de la matrice de Kalman et du Grammien d'observabilité, font que la minimisation du rang nucléaire n'est certainement plus convexe. Il y a donc là un challenge à relever dans la formulation de ce problème ainsi que dans sa résolution. Evidemment, on pré-suppose une connaissance complète du réseau et de ses possibilités d'évolution. Il est alors naturel de s'intéresser au cas où la connaissance du réseau se limite à un certain voisinage. Il est noter qu'au delà du fait de contrôler la topologie du réseau, la simple question de l'évaluation locale de l'observabilité est une question ouverte. En effet, comment un nœud peut-il évaluer ses capacités à observer le réseau complet en ne connaissant qu'une partie du réseau et donc qu'une partie de la matrice d'état du système ? Peut-on se passer de l'estimation distribuée de la topologie du réseau ? Celle-ci devient en effet très problématique lorsqu'il s'agit de réseaux de grande dimension. Une idée à creuser est de considérer la partie inconnue du réseau comme étant aléatoire et donc de recourir à des caractérisations probabilistes (observabilité à une probabilité donnée par exemple). L'enjeu serait donc de maximiser ou minimiser des probabilités sur l'observabilité d'un système, par exemple. La théorie sur l'optimisation aléatoire pourrait être d'un grand intérêt [2, 3].

### 6.1.2 L'intégrité

Dans de nombreuses applications le réseau peut être soumis à des entrées exogènes (défauts dans le réseau ou attaques intentionnelles sur le réseau). Dans la littérature classique, on s'est intéressé à la question de l'observabilité en présence d'entrées inconnues et de l'observabilité conjointe état-entrée [7, 43]. Dans la littérature, il n'existe pas de caractérisation graphique de ces notions, à l'exception de celle de [9] consacrée à l'analyse très générale des systèmes structurés, où l'objectif est de développer des propriétés génériques, c'est-à-dire vraies pour tout tirage des poids associés aux interactions entre nœuds. Dans notre cas, les valeurs non-nulles des matrices mises en jeu ne sont pas indépendantes. Il s'agira donc de trouver une caractérisation graphique et/ou algébrique de l'observabilité conjointe état-entrée lorsque les valeurs non-nulles décrivant le réseau sont contraintes (non-indépendantes). Nous nous intéresserons en particulier au cas d'entrées parcimonieuses. En effet, on peut supposer que les attaques ne surviennent qu'en des points isolés du réseau et de façon sporadique [97]. Dans ce cas, des résultats préliminaires ont été énoncés dans la littérature. Par exemple, lorsque la matrice d'observation est bloc-diagonale, des conditions suffisantes pour assurer que la matrice d'observabilité vérifie la propriété d'isométrie restreinte (*Restricted Isometry Property*<sup>1</sup>) ont été établies dans [86]. D'autres types de modèle d'observation sont à étudier et une caractérisation graphique à rechercher. D'une façon générale, on peut noter que la prise en compte de la parcimonie des entrées est une connaissance *a priori* qu'on désire exploiter. On peut donc s'intéresser à la caractérisation de l'observabilité d'un sous-ensemble d'états plutôt que de l'état complet (observabilité partielle). Une telle approche d'analyse peut s'avérer utile lorsque l'état du système en réseau peut être partitionné en états sensibles (privés) et états non-sensibles (publics)<sup>2</sup>.

Pendant le post-doctorat de Alireza ESNA-ASHARI, nous avons travaillé sur les estimateurs conjoints état-entrée dans le cas distribué. Ci-dessus, nous avons rappelé que les attaques sur un système pouvaient être modélisées comme des entrées inconnues sur un système dynamique. Des approches très diverses ont été développées depuis les années 1970 pour estimer l'état et les entrées inconnues d'un système dynamique. Lorsque la dynamique des entrées inconnues est connue, une première approche consiste à construire un système dynamique augmenté, dont l'état est constitué du système initial et des entrées inconnues [42]. Lorsqu'on ne dispose d'aucune connaissance sur la dynamique des entrées inconnues, il est encore possible d'augmenter l'état du système en incorporant les entrées inconnues. Cependant, n'ayant pas de modèle dynamique à associer à ces entrées, le modèle résultant est singulier [59].

Contrairement à la plupart des travaux dans la littérature, nous nous intéresserons aux algorithmes distribués et tiendrons compte de la parcimonie dans les signaux d'entrée en adoptant l'approche des systèmes singuliers. Nous avons commencé à

1. Propriété cruciale pour la reconstruction cohérente de signaux parcimonieux [22]

2. Nous reprenons ici la terminologie du cryptage dans laquelle le processus de cryptage se scinde en clé publique et clé privée, cette dernière étant l'information la plus sensible du processus.



Illustrons une approche de solution possible. Un nœud observe  $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{x}_k + e_k$ ,  $e_k$  étant l'entrée inconnue. Du point de vue de ce nœud, il s'agit de minimiser l'erreur entre la mesure et l'estimation avec une contrainte de parcimonie sur l'entrée :

$$\min \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{x}_k + e_k\|^2 + \lambda \|e_k\|_1$$

Enfin, on peut aussi envisager le cas où les nœuds souhaitent conserver leur état secret tout en collaborant pour l'estimation de l'entrée inconnue, faisant ainsi le lien avec l'aspect respect de vie privée évoqué dans le paragraphe précédent.

## 6.2 Données massives multidimensionnelles : application à l'analyse et la prédiction du trafic



Bien qu'il existe une vaste littérature sur l'analyse de la congestion, la modélisation et la propagation des flux dans les réseaux de transport monodimensionnels et unimodaux, la plupart des contributions, d'un point de vue réseau, sont basées sur

des modèles simplistes ou sur des simulations souvent difficiles à faire tourner en temps réel. Du point de vue d'une agglomération, un réseau de transport est par essence multimodal (Bus, Tram, voitures individuelles,...) et hétérogène (urbain, périurbain,...). L'hétérogénéité et la multimodalité viennent aussi du type et de la modalité d'acquisition de l'information (stations de comptage, capteurs magnétiques sans fil, caméras, GPS, données de téléphonie,...). A ces caractéristiques s'ajoute la nature spatio-temporelle des flux (informations) à analyser.

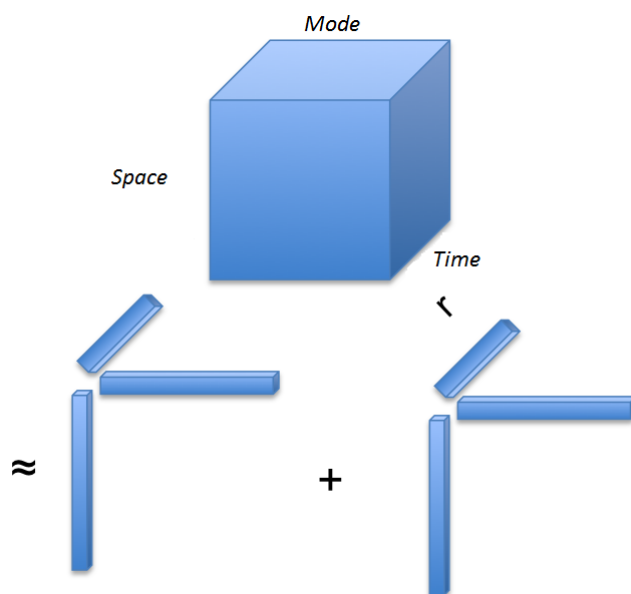


FIGURE 6.2 – Approximation de rang faible d'un tenseur

Depuis quelques années, les modèles/décompositions tensoriels sont utilisés dans divers champs d'application pour prendre en compte la multidimensionalité des données, et cela grâce principalement à leurs intéressantes propriétés d'identifiabilité/unicité. Nous nous proposons donc d'explorer l'apport que pourraient avoir les modèles tensoriels sur l'analyse des réseaux de transport. Les questions fondamentales que nous adresserons sont :

- quels modèles tensoriels peuvent intégrer la prise en compte de la multidimensionalité, de la multimodalité et de l'hétérogénéité du trafic ?
- Quelles sont leurs propriétés d'identifiabilité et leurs conditions de validité ?
- Quels algorithmes permettent de décomposer des tenseurs de grandes dimensions dans une architecture distribuée ?

Il est à noter que l'utilisation d'une approche tensorielle pour l'analyse du trafic dans les réseaux de transport n'a été que très récemment considérée et ce pour des objectifs très précis : classification statique de données de trafic [14, 34] et imputation de données manquantes [95]. L'analyse des tenseurs dans le domaine du trafic n'est

donc qu'à son commencement et mérite d'être explorée. Cependant, les résultats obtenus devront être suffisamment pertinents pour convaincre les différentes communautés travaillant autour de la thématique des réseaux de transport de migrer vers ce nouveau type d'outils ou de les combiner avec les leurs. Les axes d'étude et les challenges à relever sont décrits ci-après :

### **6.2.1 Estimation des matrices origine-destination**

La matrice origine-destination (OD) est un outil nécessaire pour l'analyse des plans de déplacement dans une ville. Si on rajoute la dimension temporelle à cette matrice, nous obtenons un objet tridimensionnel, les dimensions étant l'origine, la destination, et le temps. En général, les capteurs ne fournissent que des mesures de flux indexées sur l'origine ou la destination, une origine pouvant être associée à plusieurs destinations et vice versa. Toute la question est d'être en mesure de reconstruire la matrice OD à partir de mesures multidimensionnelles indirectes indexées par exemple par l'origine, le temps, la modalité ou le type de véhicule. Dans la littérature dédiée à l'analyse du trafic dans les réseaux informatiques, il a été montré que les matrices de trafic peuvent être correctement approximées avec une décomposition de rang faible. Dans le cas des tenseurs, il est aussi possible d'obtenir une approximation de rang faible, la plus simple correspondant à une somme de tenseurs de rang 1, appelée décomposition PARAFAC (ou décomposition polyadique canonique). Cette décomposition est très utilisée dans les applications car elle possède de bonnes propriétés d'unicité, nécessaires pour la résolution de problèmes inverses comme celui de l'estimation de la matrice OD. Etant donné un problème d'estimation de matrice OD, la question ici est de trouver le modèle tensoriel adéquat, d'en déterminer les conditions de validité ainsi que d'identifiabilité.

### **6.2.2 Clusterisation dynamique des flux**

En vue de prédire l'évolution du trafic et les métriques relatives comme le temps de parcours entre une origine et une destination, on dispose généralement à la fois de mesures de flux en temps réel et de données historiques. Une prédiction efficace se base alors sur une exploitation pertinente des données historiques conditionnellement à celles observées. Pour ce faire, une bonne clusterisation des données historiques est nécessaire (voir la thèse de Leon Ojeda, 2014, et les références associées). Bien que les flux dans un réseau de transport aient naturellement un caractère spatio-temporel, les techniques de clusterisation de données de trafic ignorent généralement cette propriété. Les tenseurs représentent une manière intuitive de modéliser un problème multidimensionnel tel que la clusterisation de données spatio-temporelles. L'approche tensorielle a déjà été utilisée dans la littérature pour des données multidimensionnelles statiques [14, 82, 79] ; la plupart des applications concernent l'analyse des images et des graphes. Dans le cadre du trafic, les seules contributions sont celles de [34] et de [92]. Le trafic étant très variable dans le temps, en vue d'une prédiction à court terme efficace, la clusterisation des données historiques devrait

se faire de manière dynamique. Elle porterait non pas sur des séquences d'observations de journées entières mais sur des fenêtres d'observation temporelle glissantes dont la largeur dépend de l'horizon de prédiction. La clusterisation dynamique est dès lors impérieuse puisque le cardinal de l'ensemble des données varie (d'un jour à l'autre des pans entiers de données peuvent manquer du fait d'un défaut de mesure et/ou de communication ou faute de capteurs mobiles) de même que les données déjà clusterisées varient d'une fenêtre d'observation à l'autre. Ceci entraîne des modifications ou des réorganisations dynamiques des clusters. Le challenge à relever sera de développer une approche d'analyse tensorielle dynamique se basant sur des décompositions tensorielles sous contrainte. Une première contrainte, due à la nature intrinsèque des flux, est la non-négativité des sources. Une seconde contrainte concerne la parcimonie car du point de vue du réseau d'une agglomération la distribution du trafic peut présenter un caractère parcimonieux qui varie dans le temps en raison des centres d'intérêt de la ville (écoles, hôpitaux, zone industrielle, zone commerciale, etc.).

### 6.2.3 Prédiction des temps de parcours dans un contexte multi-origines multi-destinations

Considérons un réseau de  $M$  origines et  $D$  destinations. Supposons que l'on dispose au maximum de  $T$  mesures chronologiques pour chaque paire origine-destination, ces  $T$  mesures se répartissant sur plusieurs jours consécutifs. L'expérience du terrain nous montre qu'il peut y avoir des données manquantes sur plusieurs heures ou jours consécutifs. En général, il est d'usage d'imputer les données manquantes via des techniques d'interpolation. Ces méthodes sont efficaces lorsqu'on se limite à quelques échantillons manquants. Par ailleurs, l'information spatiale n'est pas prise en compte de façon optimale, les mesures de chaque paire étant analysées séparément. La vision qu'on peut adopter est de considérer les données disponibles du réseau dans leur globalité. Etant donné que plusieurs routes peuvent être utilisées pour relier une origine et une destination. Il est alors vraisemblable que les mesures de différentes paires soient fortement corrélées. Il y a donc tout intérêt à considérer les données générées par le réseau de façon globale. En particulier, ces données peuvent naturellement être associées à un tenseur d'ordre trois, les trois axes étant l'origine, la destination et le temps. L'idée principale est de pouvoir déterminer une approximation de rang faible du tenseur de données, puis utiliser cette approximation pour la prédiction. En considérant une approximation avec un modèle de type CP, une des matrices facteurs caractérise tout l'aspect dynamique des données. En effet, dans le cas de notre tenseur de données, les matrices facteurs seront à associer à l'attractivité d'une destination, le pouvoir générateur d'une origine, et l'aspect dynamique (évolution dans le temps). Etant donné que l'approximation est censée être de rang faible, nous obtenons une réduction de dimensionnalité conséquente dans le mode temporel. Les données de la matrice facteur associée à l'aspect dynamique des données peuvent alors être utilisées pour faire de la prédiction. Les techniques utilisées dans les thèses de L. Leon Ojeda et de A. Ladino Lopes pourront être mises

à profit pour ce faire. Il est à noter que les décompositions matricielles et tensorielles avec données manquantes ont fait l'objet de récents travaux dans la littérature. Nous nous baserons principalement sur les travaux [23] et [1] et nous tiendrons compte de la structure du réseau et exploiterons la structure sous-jacente des matrices facteurs.



# Bibliographie

- [1] Evrim Acar, Daniel M. Dunlavy, Tamara G. Kolda, and Morten Mørup. Scalable tensor factorizations for incomplete data. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 106(1) :41–56, March 2011. [97](#)
- [2] T. Alamo, R. Tempo, and E.F. Camacho. Randomized strategies for probabilistic solutions of uncertain feasibility and optimization problems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 54 :2545–2559, 2009. [91](#)
- [3] T. Alamo, R. Tempo, A. Luque, and D.R. Ramirez. Randomized methods for design of uncertain systems : Sample complexity and sequential algorithms. *Automatica*, 52 :160–172, 2015. [91](#)
- [4] D.L. Alspach and H.W. Sorenson. Nonlinear bayesian estimation using Gaussian sum approximations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 17(4) :439–447, September 1972. [74](#)
- [5] R. Aragues, G. Shi, D. V. Dimarogonas, C. Sagues, and K. H. Johansson. Distributed algebraic connectivity estimation for adaptive event-triggered consensus. In *Proc. of American Control Conference (ACC)*, pages 32–37, June 2012. [26](#)
- [6] B. Bader and T. Kolda. Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1) :205–231, December 2007. [61](#)
- [7] G. Basile and G. Marro. On the observability of linear time-invariant systems with unknown inputs. *Journal of optimization theory and applications*, 3(6) :410–415, 1969. [92](#)
- [8] R.C. Bose and D.M. Mesner. On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs. *The Annals of Mathematical Statistics*, 30 :21–38, 1959. [16](#)
- [9] T. Boukhobza, F. Hamelin, and S. Martinez-Martinez. State and input observability for structured linear systems : A graph-theoretic approach. *Automatica*, 43 :1204–1210, 2007. [92](#)
- [10] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Found. Trends Mach. Learn.*, 3(1) :1–122, January 2011. [29](#)
- [11] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*. Springer, 1989. [16](#), [17](#)
- [12] C. Canudas De Wit, F. Morbidi, L. Leon Ojeda, A.Y. Kibangou, I. Bellicot, and P. Bellemain. Grenoble Traffic Lab : An experimental platform for advanced traffic monitoring and forecasting. *IEEE Control Systems Magazine*, 35(3) :23–39, June 2015. [69](#)

- [13] J.D. Carroll and J.J. Chang. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of "Eckart-Young" decomposition. *Psychometrika*, 35 :283–319, 1970. 18
- [14] J. Cheng, Q. Xie, P. Li, and R. Yuan. A spatiotemporal tensor-based multi-object matching algorithm. In *Proc. Int. Conf. on Information Networking and Automation (ICINA)*, pages 324–328, October 2010. 94, 95
- [15] D. Choukroun, I. Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman. Novel quaternion kalman filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 42(1) :174–190, 2006. 77
- [16] P. Comon. Tensors : a brief introduction. *IEEE Sig. Proc. Magazine*, 31, May 2014. 18
- [17] P. Comon, M. Sorensen, and E. Tsigaridas. Decomposing tensors with structured matrix factors reduces to rank-1 approximations. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Sig. Process. (ICASSP 2010)*, Dallas, Tx, USA, March 14-19 2010. 53
- [18] D. Cvetković, I. Gutman, and N. Trinajstić. Graph theory and molecular orbitals II. *Croat. Chem. Acta*, 44 :365–374, 1972. 17
- [19] C.F. Daganzo. The cell transmission model : A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *Transportation Research Part B*, 28(4) :269–287, 1994. 81
- [20] A.L.F. de Almeida, A.Y. Kibangou, S. Miron, and D.C. Araujo. Joint data and connection topology recovery in collaborative wireless sensor networks. In *Proc. ICASSP*, pages 5303–5307, Vancouver, Canada, May 26-31 2013. 56
- [21] X. Dong, P. Frossard, P. Vandergheynst, and N. Nefedov. Clustering with multi-layer graphs : A spectral perspective. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(11) :5820–5831, Nov. 2012. 63
- [22] L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(4) :1289–1306, 2006. 92
- [23] Daniel M. Dunlavy, Tamara G. Kolda, and Evrim Acar. Temporal link prediction using matrix and tensor factorizations. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, 5(2) :10 (27 pages), February 2011. 97
- [24] N. Eagle, A. Clauset, A. Pentland, and D. Lazer. Multi-dimensional edge inference. *Proc. of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 107(9) :E31, 2010. 43
- [25] N. Eagle and A. Pentland. Reality mining : Sensing complex social systems. *Personal and Ubiquitous Computing*, 10(4) :255–268, 2006. 43
- [26] T. Erseghe. A distributed and scalable processing method based upon admm. *Signal Processing Letters, IEEE*, 19(9) :563–566, September 2012. 29
- [27] M. FAzel. *Matrix Rank Minimization with Applications*. PhD thesis, Stanford University, USA, 2002. 91



- [28] M. Franceschelli, A. Gasparri, A. Giua, and C. Seatzu. Decentralized estimation of Laplacian eigenvalues in multi-agent systems. *Automatica*, 49(4) :1031–1036, April 2013. 26
- [29] L. Georgopoulos. *Definitive consensus for distributed data inference*. PhD thesis, EPFL, Lausanne, 2011. 22, 24, 45
- [30] A. Ghafoor and T.R. Bashkow. A study of odd graphs as fault-tolerant interconnection networks. *IEEE Trans. on Computing*, 40(2) :225–232, 1991. 43
- [31] G.B. Giannakis and E. Serpedin. A bibliography on nonlinear system identification. *Signal Processing*, 81(3) :533–580, March 2001. 48
- [32] A. Giremus. *Apports des techniques de filtrage non-linéaire pour la navigation avec les systèmes de navigation inertiels et le GPS*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (SUPAERO), Toulouse, France, 2005. 72
- [33] C. Godsil and G. Royle. *Algebraic graph theory*. Springer, 2001. 61
- [34] Y. Han and F. Moutarde. Analysis of large-scale traffic dynamics in an urban transportation network using non-negative tensor factorization. *Int. Journal of Intelligent Transportation Systems Research*, pages 1–14, 2014. 94, 95
- [35] R.A. Harshman. Foundation of the PARAFAC procedure : models and conditions for an "explanatory" multimodal factor analysis. *UCLA working papers in phonetics*, 16 :1–84, 1970. 18, 20
- [36] R.A. Harshman. Determination and proof of minimum uniqueness conditions for PARAFAC 1. *UCLA working papers in phonetics*, 22 :111–117, 1972. 20
- [37] J.M. Hendrickx, R.M. Jungers, A. Olshevsky, and G. Vankeerberghen. Graph diameter, eigenvalues, and minimum-time consensus. *Automatica*, 50(2) :635–640, 2014. 24
- [38] J.M. Hendrickx, G. Shi, and K.H. Johansson. Finite-time consensus using stochastic matrices with positive diagonals. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 60 :1070–1073, 2015. 45
- [39] F.L. Hitchcock. The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products. *Journal of Mathematics and Physics*, 6 :164–189, 1927. 19
- [40] A.J. Hoffman and M.H. McAndrew. The polynomial of a directed graph. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 :303–309, 1965. 24
- [41] B. Hoh, T. Iwuchukwu, Q. Jacobson, M. Gruetser, A. Bayen, J.-C. Herrera, R. Herring, D. Work, M. Annavaram, and J. Ban. Enhancing privacy and accuracy in probe vehicle based traffic monitoring via virtual trip lines. *IEEE Trans. on Mobile Computing*, 11(5) :557–570, May 2012. 90
- [42] G. Hostetter and J.S. Meditch. Observing systems with unmeasurable inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 18 :307–308, 1973. 92
- [43] M. Hou and R.J. Patton. Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34 :789–794, 1998. 92

- [44] Z. Huang, S. Mitra, and G. Dullerud. Differentially private iterative synchronous consensus. In *Proc. of the 2012 ACM workshop on Privacy in the electronic society.*, pages 81–90, 2012. 90
- [45] M. Ji and M. Egerstedt. Observability and estimation in distributed sensor networks. In *Proc. IEEE Conf. Decision Control (CDC)*, pages 4221–4226, New Orleans, Louisiana, USA, 2007. 39, 43
- [46] U. Kang, E. Papalexakis, A. Harpale, and C. Faloutsos. Gigatensor : scaling tensor analysis up by 100 times-algorithms and discoveries. 60
- [47] A. Y. Kibangou. Step-size sequence design for finite-time average consensus in secure wireless sensor networks. *Systems and Control Letters*, 67 :19–23, Mar 2014. 24
- [48] A. Y. Kibangou and C. Commault. Decentralized Laplacian eigenvalues estimation and collaborative network topology identification. In *3rd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (Nec-Sys’12)*, Santa Barbara, USA, pages 7–12, 2012. 28
- [49] A.Y. Kibangou. Finite-time average consensus based protocol for distributed estimation over awgn channels. In *Proc. of the 50th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 261–265, Orlando, Fl, USA, December, 12-15 2011. 22
- [50] A.Y. Kibangou. Graph laplacian based matrix design for finite-time distributed average consensus. In *Proc. of American Control Conference (ACC), 2012*, pages 1901–1906, June 2012. 22
- [51] A.Y. Kibangou and C. Commault. Algebraic characterization of observability in distance-regular consensus networks. In *In 52nd IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1313–1318, December 2013. 37, 41
- [52] A.Y. Kibangou and A.L.F. de Almeida. Distributed PARAFAC based DS-CDMA blind receiver for wireless sensor networks. In *Proc. of the IEEE Workshop SPAWC*, Marrakech, Morocco, June 20-23 2010. 56, 61
- [53] A.Y. Kibangou and A.L.F. de Almeida. Distributed khatri-rao space-time coding and decoding for cooperative networks. In *Proc. of the European Signal Proc. Conference (EUSIPCO)*, Barcelona, Spain, August 2011. 56
- [54] A.Y. Kibangou and G. Favier. Wiener-Hammerstein systems modeling using diagonal Volterra kernels coefficients. *IEEE Signal Proc. Letters*, 13(6) :381–384, June 2006. 49
- [55] A.Y. Kibangou and G. Favier. Non-iterative solution for PARAFAC with a Toeplitz matrix factor. In *Proc. EUSIPCO*, Glasgow, Scotland, August 24-28 2009. 20, 53
- [56] A.Y. Kibangou and G. Favier. Tensor-based identification of the structure of block-oriented nonlinear systems. In *Proc. IFAC Symp. on System Identification (SYSID)*, Saint Malo, France, July 6-8 2009. 51

- [57] A.Y. Kibangou and G. Favier. Identification of fifth-order Volterra systems using I.I.D. inputs. *IET Signal Processing*, 4(1) :30–44, 2010. 52
- [58] A.Y. Kibangou and G. Favier. Tensor analysis based model structure determination and parameter estimation for block-oriented nonlinear systems. *IEEE J. on Selected Topics on Signal Processing*, 4(3) :514–525, 2010. 20, 50
- [59] D. Koenig and S. Mammar. Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(12) :2057–2062, 2002. 92
- [60] J.B. Kruskal. Three-way arrays : rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics. *Linear Algebra Applicat.*, 18 :95–138, 1977. 19, 62
- [61] J. Le Ny and G. Pappas. Differentially private filtering. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 59(2) :341–354, 2014. 39, 90
- [62] A.P. Liavas, P.A. Regalia, and J.-P. Delmas. Blind channel approximation : Effective channel order determination. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 47(12) :3336–3344, December 1999. 52
- [63] M.J. Lighthill and G.B. Whitham. On kinematic waves ii : A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178) :317–345, 1955. 81
- [64] X. Liu and N.D. Sidiropoulos. Cramér-rao lower bounds for low-rank decomposition of multidimensional arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(9) :2074–2086, Sept. 2011. 65
- [65] H.C. Longuet-Higgins. Resonance structures and MO in insaturated hydrocarbons. *J. Chem. Phys.*, 18 :265–274, 1950. 17
- [66] E. Lovisari, C. Canudas de Wit, and A.Y. Kibangou. Data fusion algorithms for density reconstruction in road transportation networks. In *Proc. 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Osaka, Japan., Dec. 2015. 83
- [67] M. Mardani, G. Mateos, and G.B. Giannakis. Recovery of low-rank plus compressed sparse matrices with application to unveiling traffic anomalies. *IEEE Trans. on Information Theory*, 61 :5186–5205, 2013. 93
- [68] G. Mateos and G.B. Giannakis. Robust PCA as bilinear decomposition with outlier sparsity regularization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 60 :5176–5190, 2012. 93
- [69] R. Merris. Laplacian matrices of a graph : a survey. *Linear Algebra and its Applications*, 197 :143–176, 1994. 33
- [70] I.-C. Morarescu and C. Canudas-de Wit. Highway traffic model-based density estimation. In *Proc. of American Control Conference*, San Francisco, CA, USA, June 2011. 81
- [71] F. Morbidi and A. Y. Kibangou. A distributed solution to the network reconstruction problem. *Systems & Control Letters*, 70 :85 – 91, 2014. 37, 38

- [72] A. Nedic, A. Ozdaglar, and P.A. Parrilo. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4) :922–938, 2010. 29
- [73] R. Nikoukhah, A.S. Willsky, and B.C. Levy. Kalman filtering and riccati equations for descriptor systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(9) :1325–1342, Sep 1992. 78
- [74] G. Notarstefano and G. Parlangeli. Observability and reachability of grid graphs via reduction and symmetries. In *Proc. IEEE CDC*, pages 5923–5928, Orlando, FL, USA, December 2011. 39
- [75] G. Notarstefano and G. Parlangeli. Reachability and observability of simple grid and torus graphs. In *Proc. IFAC World Congress*, Milan, Italy, August 2011. 39
- [76] N. O’Cleary, Y. Yuan, G.-B. Stan, and M. Barahona. Observability and coarse graining of consensus dynamics through the external equitable partition. *Physical Review E*, 88 :042805 :1–042805 :13, 2013. 39
- [77] R. Olfati-Saber. Distributed Kalman filtering for sensor networks. In *Proc. of the 46th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 5492–5498, New Orleans, LA, USA, December 12–14 2007. 38
- [78] E. Papalexakis, C. Faloutsos, and N. Sidiropoulos. Parcube : Sparse parallelizable tensor decompositions. 62
- [79] E.E. Papalexakis and N. D. Sidiropoulos. From k- means to higher-way co-clustering : Multilinear decomposition with sparse latent factors. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 61(2) :493–506, 2013. 95
- [80] G. Parlangeli and G. Notarstefano. On the reachability and observability of path and cycle graphs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 57(3) :743–748, march 2012. 39, 89
- [81] A.H. Phan and A. Cichocki. PARAFAC algorithms for large-scale problems. *Neurocomputing*, 74(11) :1970–1984, 2011. 62
- [82] T. Porges and G. Favier. Automatic target classification in SAR images using MPCA. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP’2011)*, pages 324–328, Prague, Czech Republic, 2011. 95
- [83] A. Rahmani, M. Ji, M. Mesbahi, and M. Egerstedt. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48 :162–186, 2009. 39
- [84] J. Ren, W.-X. Wang, B. Li, and Y.-C. Lai. Noise bridges dynamical correlation and topology in coupled oscillator networks. *Physical Review Letters*, 104 :058701 :1–058701 :4, February 2010. 37
- [85] T. Sahai, A. Speranzon, and A. Banaszuk. Hearing the cluster of a graph : A distributed algorithm. *Automatica*, 48(1) :15–24, January 2012. 26
- [86] B.M. Sanandaji, M.B. Wakin, and T.L. Vincent. Observability with random observations. *IEEE Trans. Automatic Control*, 2014. 92

- [87] A. Sandryhaila, S. Kar, and J. Moura. Finite-time distributed consensus through graph filters. In *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Sig. Processing (ICASSP 2014)*, May 2014. 45
- [88] N. Sidiropoulos and A. Kyrillidis. Multi-way compressed sensing for sparse low-rank tensors. *IEEE Signal Proc. Letters*, 19(11) :757–760, November 2012. 61
- [89] N.D. Sidiropoulos and R. Bro. On the uniqueness of multilinear decomposition of  $n$ -way arrays. *Journal of Chemometrics*, 14 :229–239, 2000. 19
- [90] H.W. Sorenson and D.L. Alspach. Recursive bayesian estimation using Gaussian sums. *Automatica*, 7 :465–479, 1971. 74
- [91] S. Stankovic, M.S. Stankovic, and D.M. Stipanovic. Consensus based overlapping decentralized estimator. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 54 :410–415, 2009. 90
- [92] Y. Sun, V.P. Janeja, M.P. McGuire, and A. Gangopadhyay. Tnet :tensor-based neighborhood discovery in traffic networks. In *Proc. IEEE 28th International Conference on Data Engineering Workshops.*, 2012. 95
- [93] S. Sundaram and C. Hadjicostis. Distributed function calculation and consensus using linear iterative strategies. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 26(4) :650–660, May 2008. 28
- [94] L. Sweeney.  $k$ -anonymity : A mo. *Int. Journal of Uncertainty, Fuziness and Knowledge-Based systems*, 10(5) :557–570, 2002. 90
- [95] H. Tan, G. Feng, J. Feng, W. Wang, Y.-J. Zhang, and F. Li. A tensor-based method for missing traffic data completion. *Transportation Research Part C*, 28 :15–27, 2013. 94
- [96] L. Tang, X. Wang, and H. Liu. Community detection via heterogeneous interaction analysis. *Data Min. Knowl. Discov.*, 25(1) :1–33, 2012. 63
- [97] A. Teixeira, I. Shames, H. Sandberg, and K.H. Johansson. A secure control framework for resource-limited adversaries. *Automatica*, 51 :135–148, 2015. 92
- [98] T.M.D. Tran and A. Y. Kibangou. Distributed design of finite-time average consensus protocols. In *4th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NecSys'13)*, Koblenz, Germany, September 2013. 25
- [99] E.R. van Dam and W.H. Haemers. Which graphs are determined by their spectrum ? *Linear Algebra and its Applications*, 373 :241 – 272, 2003. 34
- [100] E.R. van Dam and W.H. Haemers. Developments on spectral characterizations of graphs. *Discrete Math.*, 309 :576–586, 2009. 34
- [101] J.C. Willems. A framework for the study of dynamical systems. In J.H. Van Schuppen M.A. Kaashoek and A.C.M. Ran, editors, *Realization and modelling in system theory*, pages 43–60. Birkhauser-Verlag, Boston, MA, 1990. 78

- [102] P. Yang, R.A. Freeman, G. Gordon, K. Lynch, S. Srinivasa, and R. Sukthankar. Decentralized estimation and control of graph connectivity for mobile sensor networks. *Automatica*, 49 :390–396, 2010. [26](#)
- [103] Y. Yuan, G. Stan, L. Shi, M. Barahona, and J. Goncalves. Decentralized minimim-time consensus. *Automatica* 49, pages 1227–1235, 2013. [26](#)
- [104] S. Zhang, K. Camlibel, and M. Cao. Controllability of diffusively-coupled multi-agent systems with general and distance regular coupling topologies. In *Proc. IEEE Conf. Decision Control (CDC)*, pages 759–764, Orlando, FL, USA, 2011. [39](#)